

Guida alla

Fisica di Base

Lorenzo Zaninetti
zaninetti@ph.unito.it
Dipartimento di Fisica Generale
Edizione I
10 febbraio 2018

Introduzione

Queste note vogliono rappresentare un' introduzione alla fisica di base.

Indice

Introduzione	iii
1 Unità di misura	1
1.1 Il sistema mks	2
1.2 Il sistema cgs	3
1.3 Nota sulla caloria	4
1.4 Il sistema tecnico	5
1.5 Il sistema SI	6
1.6 Prefissi nel SI	7
1.7 Analisi dimensionale	7
2 Vettori	9
2.1 Operazioni sui vettori	9
2.2 Prodotto per uno scalare	10
2.3 Prodotto scalare	11
2.4 Prodotto vettoriale	12
2.5 Prodotto misto	13
2.6 Componenti di un vettore	14
2.6.1 Scomposizione di un vettore	14
2.6.2 Coordinate Cartesiane	15
2.6.3 Componenti cartesiane di un vettore	15
2.7 Vettore libero e applicato	18
3 Equilibrio	19
3.1 Reazioni vincolari	19
3.2 Esempio	19
4 Cinematica del punto	21
4.1 Tempo	21

4.2	Spazio	22
4.3	Punto	23
4.4	Traiettoria	23
4.5	Spazio vettoriale	23
4.6	Vettore di posizione	24
4.7	Posizione	24
4.8	Moto rettilineo	25
4.8.1	velocità	25
4.8.2	Accelerazione	26
4.9	Moto armonico	26
4.10	Moto nel piano	28
4.10.1	Coordinate polari e cartesiane	28
4.10.2	Posizione e velocità	28
4.10.3	Accelerazione	29
4.11	Moto circolare	30
4.11.1	Velocità angolare - Notazione vettoriale	31
5	Dinamica	33
5.1	Significato	33
5.2	Forza ed Inerzia	33
5.2.1	Principio d'inerzia (Galileo) o Prima legge di Newton	33
5.2.2	Seconda legge di Newton	34
5.2.3	Terza legge di Newton	35
5.3	Quantità di Moto	36
5.4	Azione delle forze	37
5.5	Equilibrio	38
5.6	Vari tipi di forze	38
5.6.1	La forza peso	39
5.6.2	La forza di attrito	39
5.6.3	Forza elastica	39
5.6.4	Forze centripete	40
5.7	Piano inclinato	40
5.8	Pendolo Semplice	41
5.9	Lavoro e Energia	42
5.9.1	Energia Cinetica	43
5.9.2	Energia potenziale	43
5.9.3	Energia Meccanica	44
5.10	Momenti	45

5.10.1	Momento angolare	46
5.10.2	Momento della forza	46
6	Moti relativi	49
6.1	Velocità relativa	50
6.2	Accelerazione relativa	50
6.3	Sistemi inerziali	51
7	Dinamica sistemi	53
7.1	Forze	53
7.2	Centro di massa	53
7.2.1	Quantità di moto	54
7.2.2	Momento angolare	55
7.3	Sistema CM	56
7.4	Teoremi di Konig	56
7.4.1	Primo teorema di Konig	56
7.4.2	Dimostrazione	57
7.4.3	Secondo teorema di Konig	57
7.4.4	Dimostrazione	58
7.5	Energia cinetica	58
7.6	Urti	59
7.6.1	Urti completamente anelastici	59
7.6.2	Urti elastici	60
8	Gravitazione	61
8.1	Storia	61
8.1.1	Prima Legge di Keplero	61
8.1.2	Seconda Legge di Keplero	61
8.1.3	Terza Legge di Keplero	61
8.2	Gravitazione Universale	62
8.3	Campo gravitazionale	63
8.4	Lavoro	63
9	Dinamica corpo	65
9.1	Corpo rigido	65
9.2	CM corpo rigido	65
9.3	Momenti	66
9.3.1	Momento angolare	66
9.3.2	Momento d'inerzia	67

9.4	Energia cinetica	67
9.5	Huygens-Steiner	67
9.6	Pendolo composto	68
9.7	Moto di puro rotolamento	68
10	Formulario di Fisica I	69
10.1	Cinematica	69
10.1.1	Moto 1D	69
10.1.2	Moto del proiettile	69
10.2	Leggi di Newton	70
10.3	Lavoro ed energia	70
10.4	Conservazione del momento e collisioni	70
10.5	Moto rotazionale	70
10.6	Equilibrio rotazionale e dinamica	71
10.7	Gravitazione	71
10.8	Fluidi	71
10.9	Moto Oscillatorio	71
10.10	Onde	72
10.11	Temperatura, Calore	72
A	Alfabeto greco	73
B	Compiti di Esame	75
B.1	Settembre 2009	75
B.2	Febbraio 2010	76
B.3	Marzo 2010	76
B.4	Luglio 2010	77

Capitolo 1

Unità di misura

Nei vari sistemi di unità di misura esistenti la scelta delle unità di misura è completamente arbitraria, ma deve rispettare certi criteri di convenienza e di praticità, quale per esempio di adottare unità che non siano nè troppo grandi nè troppo piccole da imporre poi nei calcoli l'uso di troppi prefissi, di multipli o sottomultipli; questo criterio non è però strettamente applicabile, in quanto molto spesso si deve tener conto della possibilità di costruire un campione dell'unità adottata. Premettiamo alla trattazione dei sistemi di unità di misura una serie di definizioni.

Un sistema di unità di misura si dice *completo* quando in esso è definito un numero di unità di grandezze fondamentali sufficiente a rappresentare quantitativamente tutti i fenomeni osservabili.

Un sistema di unità di misura si dice *assoluto* quando le unità in esso adottate sono invariabili in ogni tempo e luogo e sono definite teoricamente senza alcun riferimento a definizioni sperimentali. Le unità di un tale sistema vengono dette assolute.

Un sistema di unità di misura si dice *coerente* quando il prodotto o il quoziente di più unità di tale sistema forniscono una nuova unità il cui valore è sempre unitario.

Un sistema di unità di misura si dice *decimale* quando i multipli ed i sottomultipli delle sue unità sono scelti secondo le potenze del 10.

Un sistema di unità di misura si dice *razionalizzato* quando i coefficienti numerici che compaiono nelle leggi vengono scelti in modo che l'irrazionale π appaia soltanto in formule relative a configurazioni circolari, sferiche o cilindriche e non in quelle relative a configurazioni piane;

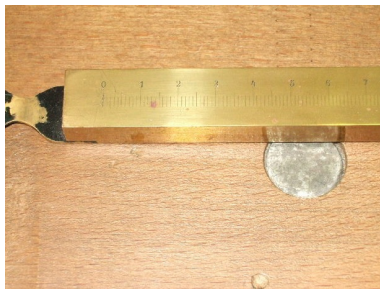


Figura 1.1: Foto del metro campione nel laboratorio

la razionalizzazione si rende in particolar modo necessaria nell' unità dell' elettromagnetismo.

1.1 Il sistema mks

Il *sistema mks* trae il proprio nome dalle iniziali delle tre unità di misura delle grandezze meccaniche in esso adottate: il *metro* (m) per la lunghezza, il *kilogrammo* (kg) per la massa e il *secondo* (s) per gli intervalli di tempo. Riportiamo in Figura 1.1 una fotografia del metro campione esistente in laboratorio. Tale sistema è ovviamente incompleto, assoluto e razionalizzato. Dato che esso non poteva descrivere tutte le grandezze, mancando l' unità di misura di una grandezza fondamentale elettrica o magnetica, ne sono state fatte successive estensioni introducendo una quarta unità: a seconda che la quarta grandezza fondamentale fosse la carica elettrica (unità di misura: *coulomb* , C), la resistenza elettrica (unità di misura: *ohm* , Ω) o intensità di corrente elettrica (unità di misura: *Ampere* , A) vennero introdotti i tre sistemi mksC, mks Ω ed mksA. In pratica l' ultimo, completato con le tre unità di temperatura (kelvin, K), di intensità luminosa (candela, cd) e di quantità di sostanza (mole, mol), è quello che va sotto il nome di Sistema Internazionale. Le unità dei tre sistemi mksC, mks Ω ed mksA sono perfettamente coincidenti in quanto esse differiscono l' uno dall' altro soltanto per la scelta della grandezza elettrica fondamentale da associare alle tre grandezze meccaniche.

1.2 Il sistema cgs

È un sistema assoluto basato sull'adozione delle tre grandezze meccaniche fondamentali (lunghezza, massa, intervallo di tempo), cui sono associate rispettivamente come unità di misura: il *centimetro* (cm), il *grammo* (g) e il *secondo* (s), dalle cui iniziali esso trae il nome. Esso fu proposto su suggerimento di Lord Kelvin dall'Associazione Britannica per il Progresso delle Scienze (1873) e adottato nel 1881 al I Congresso Internazionale di Eletticità. Tale sistema è incompleto, in quanto non comprende grandezze elettriche né magnetiche ed è perciò adatto solo per la rappresentazione di fenomeni meccanici. L'estensione alla rappresentazione dei fenomeni elettromagnetici è stata fatta con l'adozione dei sistemi cgs_{es} (elettrostatico) e cgs_{em} (elettromagnetico) ai quali rimandiamo. L'unità di *velocità* è il cm/s; l'unità di *accelerazione*, il cm/s², detta anche *gal* (Gal). L'unità di *forza* è la *dina* (simbolo dyn), definita come quella forza che, applicata ad un corpo di massa 1 g, gli conferisce un'accelerazione di 1 cm/s² nella stessa direzione di applicazione della forza; per la seconda legge della dinamica ($F = ma$) avremo perciò

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g } 1 \text{ cm/s}^2 \quad . \quad (1.1)$$

L'unità di *lavoro* è l'*erg*, definito come il lavoro compiuto dalla forza di 1 dyn per spostare un corpo di 1 cm nella stessa direzione di applicazione della forza; per la definizione di lavoro sarà perciò

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn } 1 \text{ cm} \quad . \quad (1.2)$$

L'erg è anche l'unità di misura dell'energia nel sistema cgs. L'unità di misura della potenza è ergs; quella della *massa volumica* g/cm³; quella della *pressione*, sarà dyn/cm², chiamata anche *baria*. L'unità di *quantità di moto*, g cm/s; l'unità di *momento meccanico*, dyn cm; l'unità di *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) erg s; l'unità di *portata di volume*, cm³/s, mentre quello di *portata di massa* è g/s. L'unità di *viscosità dinamica*, dalla legge di Newton che definisce il coefficiente di viscosità η ($F = -\eta A dv/dx$), risulta essere g/(cm s), chiamata *poise* (P), mentre l'unità di *viscosità cinematica* ν , definita dalla relazione: $\nu = \eta/\rho$, con ρ massa volumica del fluido, è cm²/s, chiamata *stokes* (St).

Per quanto riguarda i fenomeni termici, il sistema cgs adotta altre due unità, il *grado Celsius* (°C) per la temperatura e la *caloria* (cal)

per la quantità di calore. La caloria (o *piccola caloria* è invece definita come la quantità di calore che si deve fornire alla massa di 1 g di acqua distillata per portarne la temperatura da 14.5 a 15.5 °C).

Pertanto nel sistema cgs l'unità di *calore specifico* sarà cal/ (g °C); l'unità di *capacità termica*, cal / °C; l'unità di *calore latente*, cal/ g; l'unità di *conduttività termica*, dalla legge di Fourier che definisce il *coefficiente di conduttività termica* [$\lambda = (\delta Q)/A(dT/dx)$], è cal/(s cm °C).

L'unità dei vari *potenziali termodinamici*, che si identificano con delle energie è l' erg.

Il sistema cgs utilizza tre unità supplementari comuni ad altri sistemi metrici, che sono:

- il *radiante* (rad), unità di angolo piano;
- lo *steradiano* (sr), unità di angolo solido;
- la *mole* (mol), unità di quantità di sostanza.

Per la loro definizione ufficiale si rimanda il lettore ad uno dei prossimi paragrafi.

1.3 Nota sulla caloria

In effetti la caloria è oggi un' unità poco usata, in quanto si tende a sostituirla con l' erg o con il joule e ciò in base alla ormai acquisita nozione che il calore è una forma di energia interna dei corpi e quindi misurabile in unità di energia. Sono state proposte dal 1934 ad oggi vari tipi di caloria:

la *caloria* a 15 °C, ovvero quella definita nel paragrafo precedente, tale che:

$$1 \text{ cal}_{15} = (4.1855 \pm 0.0005) J \quad , \quad (1.3)$$

adottata nel 1934 dall' Unione Internazionale di Fisica Pura e Applicata e successivamente anche dal Comitato Internazionale Pesi e Misure nel 1960; chiamata anche *piccola caloria* o *grammo caloria* ;

la *caloria termochimica*, definita come:

$$1 \text{ cal}_{tc} = 4.184 J \quad ; \quad (1.4)$$

la *caloria internazionale*, adottata nel 1956 alla 5^a Conferenza Internazionale sulle Proprietà dei Vapori e definita come:

$$1 \text{ cal}_{IT} = 4.1868 \text{ J} \quad ; \quad (1.5)$$

quest'ultimo valore è quello oggi più comunemente usato, anche se la direttiva CEE del 27 luglio 1976 ha vietato l'uso di tutte le calorie a partire dal 1 gennaio 1978.

1.4 Il sistema tecnico

Chiamato anche sistema degli ingegneri o sistema gravitazionale, è un sistema metrico, non assoluto, non coerente e incompleto che assume come grandezze fondamentali la lunghezza, la forza e gli intervalli di tempo e adotta come unità di misura rispettivamente il metro, il kilogrammo-forza (o kilogrammo-peso) e il secondo.

Il *kilogrammo-forza* (kgf) è definito come quella forza che, applicata a un corpo massa 1 Kg, gli imprime un'accelerazione pari a quella di gravità campione, fissata in 9.80665 m/s^2 .

Sarà, come è facile ricavare:

$$1 \text{ Kgf} = 9.80665 \text{ N} \quad . \quad (1.6)$$

In tale sistema di conseguenza, l'unità di massa è un'unità derivata; essa viene indicata con u_m e vale 9.80665 kg .

L'unità di lavoro e di energia è il *kilogrammetro* (kgf m, più raramente kgm), definito come $1 \text{ Kgf} \cdot 1 \text{ m}$ e pari a 9.80665 J .

L'unità di potenza è il kgf m/s , del quale è molto usato un multiplo chiamato *cavallo vapore* (CV), definito esattamente come $75 \text{ kgf m/s} = 735.499 \text{ W}$.

L'unità di pressione è il Kgf/m^2 , corrispondente al millimetro d'acqua (mmH_2O).

Per ricavare i fattori di conversione fra le unità tecniche e le corrispondenti unità degli altri sistemi basta tener presente che $1 \text{ Kgf} = 9.80665 \text{ N}$, $1 u_m = 9.80665 \text{ kg}$, che si ricavano entrambe dalla seconda legge della dinamica, se si ricorda che mentre la forza di 1 N accelera la massa di 1 kg accelerazione di 1 m/s^2 , la forza di 1 kgf le imprime invece un'accelerazione di 1 m/s^2 , la forza di 1 kgf le imprime invece un'accelerazione di 9.80665 m/s^2 .

1.5 Il sistema SI

La XI Conferenza Generale di Pesi e Misure, tenutasi a Parigi dall' 11 al 20 ottobre 1960, considerata la Risoluzione 6^a della X CGPM, con la quale essa ha adottato le sei unità che devono servire di base per l' istituzione di un sistema pratico di misura per le relazioni internazionali, considerata la Risoluzione 3^a adottata dal Comitato Internazionale Pesi e Misure nel 1956, considerate le Raccomandazioni adottate dal CIPM nel 1958, concernenti l' abbreviazione del nome di questo sistema e i prefissi per la formazione dei multipli e sottomultipli delle unità.

DECIDE:

1. Il sistema metrico fondato sulle sei unità di misura base di cui sopra è designato con il nome di "Sistema Internazionale di Unità"
2. L' abbreviazione internazionale di detto sistema è "SI"

Il Sistema Internazionale, è fondato sulla adozione di sette grandezze fondamentali: le quattro del sistema mksA razionalizzato, o sistema Giorgi, e cioè la *lunghezza*, la *massa*, gli *intervalli di tempo*, l' *intensità luminosa* e la *quantità di sostanza*.

Le corrispondenti unità di misura vengono così definite:

lunghezza: il **metro** (m) ovvero la distanza percorsa nel vuoto dalla luce nell' intervallo di tempo di $(1 / 299792458)$ s .

massa: il **kilogrammo** (kg) ovvero la massa del prototipo di platino-iridio, depositato presso il Bureau International des Poids et Mesures, nei sotteranei del padiglione di Breteuil, a Sevres.

tempo: il **secondo**(s), ovvero la durata di 9 192 631 770 oscillazioni della radiazione emessa dall' atomo di Cesio 133 (^{133}Cs) nello stato fondamentale $2S_{1/2}$ nella transizione dal livello iperfine $F=4$, $M=0$ al livello iperfine $F=3$, $M=0$.

corrente elettrica: l' Ampere (A), ovvero la corrente elettrica costante che, fluendo in due conduttori rettilinei, paralleli, indefinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a distanza di 1 m nel vuoto, determina fra essi una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ N per metro di conduttore.

temperatura: il **Kelvin** (k), ovvero la frazione di $1/273.16$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell' acqua.

intensità luminosa: la **candela** (cd) è l' intensità luminosa in una data direzione di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è di $(1/683)$ W/sr.

sostanza: la **mole** (mol), ovvero la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante unità elementari quanti sono gli atomi in 0.012 Kg di carbonio 12 (^{12}C).

Accanto alle sette unità fondamentali vengono definite nel SI due unità supplementari, il radiante e lo steradiano:

angolo piano: il **radiante** (rad), ovvero quell' angolo piano con il vertice nel centro della circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

angolo solido: lo **steradiano** (sr) ovvero quell' angolo solido con il vertice nel centro della sfera che sottende una calotta sferica la cui area è uguale a quella di un quadrato con lati uguali al raggio della sfera.

1.6 Prefissi nel SI

Questi prefissi (vedi tabella 1.1) sono adoperati per indicare multipli o sottomultipli delle unità di base, eccetto che per le unità di massa che sono formate applicando il prefisso al simbolo g: esempio Mg e non kkg e mg e non μkg . Solamente un singolo prefisso è permesso. Usate ns piuttosto che $m\mu\text{s}$, pF piuttosto che $\mu\mu\text{F}$, GW piuttosto che kMW.

1.7 Analisi dimensionale

Le dimensioni di una grandezza fisica sono associate con simboli, come **M**, **L**, e **T** che rappresentano massa, lunghezza e tempo, ciascuna elevata a un esponente razionale. Nell' ambito del Sistema internazionale

Tabella 1.1: Tabella dei prefissi

<i>fattore</i>	<i>prefisso</i>	<i>simbolo</i>	<i>fattore</i>	<i>prefisso</i>	<i>simbolo</i>
10^1	<i>deka</i>	<i>da</i>	10^{-1}	<i>deci</i>	<i>d</i>
10^2	<i>hecto</i>	<i>h</i>	10^{-2}	<i>centi</i>	<i>c</i>
10^3	<i>kilo</i>	<i>k</i>	10^{-3}	<i>milli</i>	<i>m</i>
10^6	<i>mega</i>	<i>M</i>	10^{-6}	<i>micro</i>	μ
10^9	<i>giga</i>	<i>G</i>	10^{-9}	<i>nano</i>	<i>n</i>
10^{12}	<i>tera</i>	<i>T</i>	10^{-12}	<i>pico</i>	<i>p</i>
10^{15}	<i>peta</i>	<i>P</i>	10^{-15}	<i>femto</i>	<i>f</i>
10^{18}	<i>exa</i>	<i>E</i>	10^{-18}	<i>atto</i>	<i>a</i>
10^{21}	<i>zetta</i>	<i>Z</i>	10^{-21}	<i>zepto</i>	<i>z</i>
10^{24}	<i>yotta</i>	<i>Y</i>	10^{-24}	<i>yocto</i>	<i>y</i>

di unità di misura(SI), sono state definite delle "unità fondamentali", ognuna associata ad una grandezza fisica, che oltre la massa, la lunghezza e il tempo, comprendono: l' intensità di corrente, la temperatura assoluta , la quantità di sostanza e l' intensità luminosa.

Tutte le unità di misura sono riconducibili a queste unità fondamentali: per ogni grandezza fisica esiste un'equazione dimensionale che esprime la relativa unità di misura come prodotto delle potenze delle grandezze fisiche anzidette. Nell'analisi dimensionale le unità fondamentali vengono espresse dentro parentesi quadre. Riportiamo adesso alcune formule tipiche

<i>Formula Fisica</i>	<i>Significato</i>	<i>Analisi dimensionale</i>
$v = \frac{s}{t}$	<i>velocità</i>	$[v] = \frac{[L]}{[T]}$
$a = \frac{v}{t}$	<i>accelerazione</i>	$[a] = \frac{[L]}{[T^2]}$
$F = ma$	<i>forza</i>	$[F] = [M][L][T^{-1}]$
$L = Fs$	<i>lavoro</i>	$[L] = [M][L^2][T^{-1}]$

Capitolo 2

Vettori

In fisica, un "vettore" è un elemento geometrico rappresentato da un segmento orientato, munito cioè di una freccia in una delle sue estremità, e caratterizzato da "quattro" elementi:

1. **modulo:** rappresenta la lunghezza del vettore;
2. **direzione:** è individuata dal fascio di rette parallele alla retta su cui giace il vettore;
3. **verso:** il "verso" è descritto dalla punta e dalla coda del vettore stesso, rappresentato da un segmento orientato;
4. **punto di applicazione.**

Secondo questa definizione, un vettore geometrico non dipende dalla scelta del sistema di coordinate .

2.1 Operazioni sui vettori

La "somma" di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è definita come il vettore $\vec{a} + \vec{b}$, diagonale del parallelogramma formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (vedi figura 2.1).

$\vec{a} + \vec{b}$ appartiene allo stesso piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (regola del parallelogramma). La somma gode delle seguenti proprietà :

1. $\vec{a} + \vec{b}$ è ancora un vettore (cioè $\vec{a} + \vec{b}$ è "legge di composizione interna");

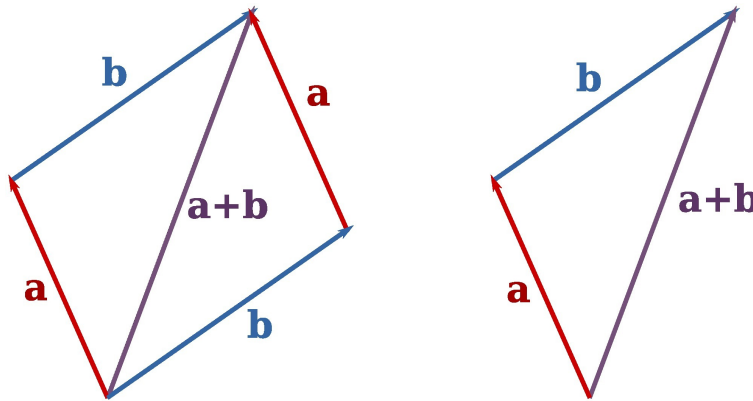


Figura 2.1: Schema della somma di due vettori

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (proprietà associativa)
3. esiste l' "elemento neutro" rispetto alla somma; il "vettore zero", $\vec{0}$ è un segmento degenere di lunghezza zero, cioè un punto;
4. esiste l' "elemento opposto" rispetto alla somma, cioè un vettore $-\vec{a}$ che sommato a $\vec{a}$ dà il vettore zero; $-\vec{a}$ è un vettore che ha lo stesso modulo, punto di applicazione e direzione di $\vec{a}$, ma verso opposto.
5. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (proprietà commutativa)

La definizione di opposto di un vettore permette di definire la differenza tra due vettori $\vec{a} - \vec{b}$ come somma di $\vec{a}$ con l'opposto di $\vec{b}$.

2.2 Prodotto per uno scalare

Il prodotto di un vettore $\vec{a}$ per uno scalare k è un vettore che ha la stessa direzione di $\vec{a}$, verso positivo se k è positivo e negativo se k è negativo ma modulo uguale a $|k| |\vec{a}|$. Se $|k| > 1$ il vettore viene dilatato, se $|k| < 1$ il vettore viene contratto.

Il prodotto per uno scalare gode delle seguenti proprietà : (siano m, n scalari e $\vec{a}, \vec{b}$ vettori)

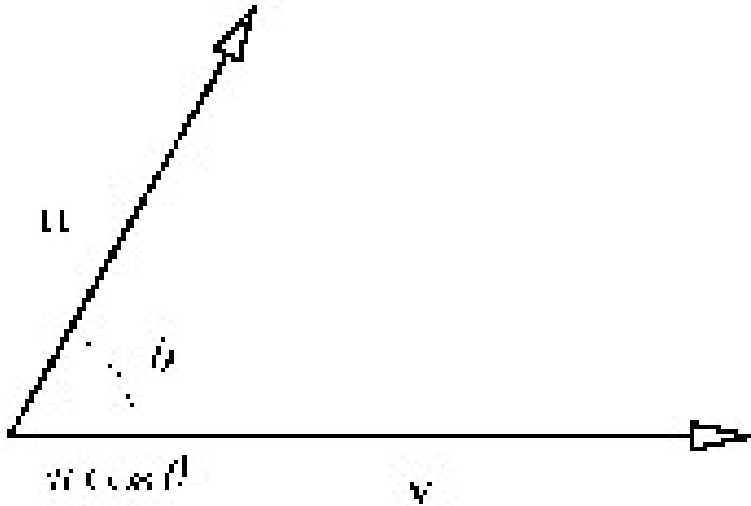


Figura 2.2: Rappresentazione grafica del prodotto scalare

1. $n\vec{a}$ è ancora un vettore (cioè il prodotto per uno scalare è legge di composizione interna);
2. $(nm)\vec{a} = n(m\vec{a})$ (proprietà associativa)
3. esiste l' elemento neutro rispetto al prodotto ed è l'elemento 1;
4. $(n+m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$ (proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri);
5. $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$ (proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori);

L'insieme dei vettori gode dunque di tutte le proprietà di uno spazio vettoriale.

2.3 Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è uno scalare, definito nel modo seguente (si veda la Figura 2.2)

$$\vec{u} \bullet \vec{v} := uv \cos \theta \quad , \quad (2.1)$$

dove θ è l'angolo formato dai due vettori .

Il prodotto scalare **non** è una legge di composizione interna, perchè associa a due vettori uno scalare. Non ha quindi senso parlare di associatività , di elemento neutro, oppure di elemento opposto; il prodotto scalare risulta invece commutativo , ovvero

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u} \quad . \quad (2.2)$$

Il prodotto scalare è nullo se almeno uno dei due vettori è il vettore nullo, oppure se essi sono tra loro perpendicolari.

2.4 Prodotto vettoriale

Si dice prodotto vettoriale dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ il vettore libero $\vec{w}$ avente:

1. la direzione della retta perpendicolare al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{u}$
2. il verso quello di una persona che percorre l'angolo θ tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$ in senso antiorario. Per il verso si utilizza anche la regola della mano destra ; disponendo pollice, indice e medio perpendicolari tra loro, se il pollice indica la direzione di $\vec{v}$ e l'indice la direzione di $\vec{u}$, allora il medio indica la direzione di $\vec{w}$ (si veda la Figura 2.3).

In maniera equivalente si può affermare che il verso di $\vec{w}$ è tale che la terna $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ sia una terna levogira .

3. il modulo di $\vec{w}$ è definito dalla formula:

$$|\vec{v} \times \vec{u}| := vu \sin \theta \quad . \quad (2.3)$$

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà

1. proprietà distributiva rispetto alla somma: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
2. è anticommutativo: $\vec{v} \times \vec{u} = - \vec{u} \times \vec{v}$
3. è nullo se almeno uno dei due vettori è il vettore nullo, oppure se i vettori sono tra loro paralleli.

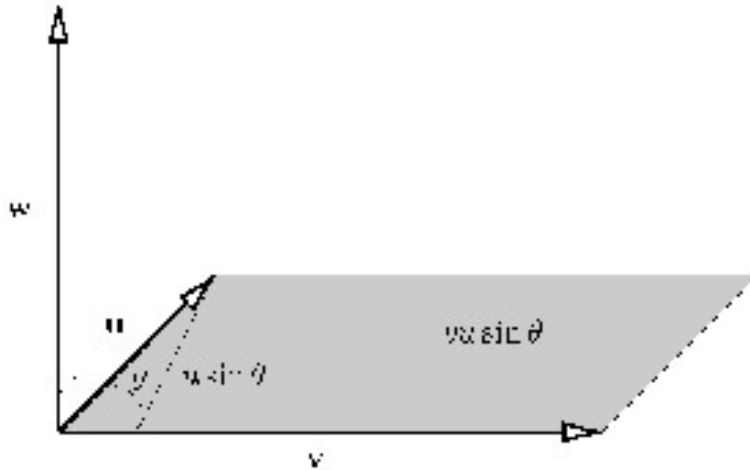


Figura 2.3: Rappresentazione grafica del prodotto vettoriale

4. Proprietà associativa rispetto ad uno scalare λ :

$$\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \times (\vec{v}) \quad , \quad (2.4)$$

5. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

6. soddisfa l'identità ciclica di Jacobi.

2.5 Prodotto misto

Il prodotto misto di tre vettori è l'area del parallelepipedo costruito su questi. Un prodotto misto è un'espressione in cui compaiono contemporaneamente prodotti scalari e vettoriali di vettori. Ad esempio, il prodotto misto di tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ è del tipo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (2.5)$$

ed è uno scalare. Il valore assoluto di questo scalare non dipende dall'ordine dei tre vettori e misura il volume del parallelepipedo costruito su di essi.

Un prodotto misto che comprende due o più prodotti vettoriali è sempre riconducibile ad una somma di prodotti misti più semplici, ciascuno avente al più un prodotto vettoriale. Ad esempio:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = a^2(\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad . \quad (2.6)$$

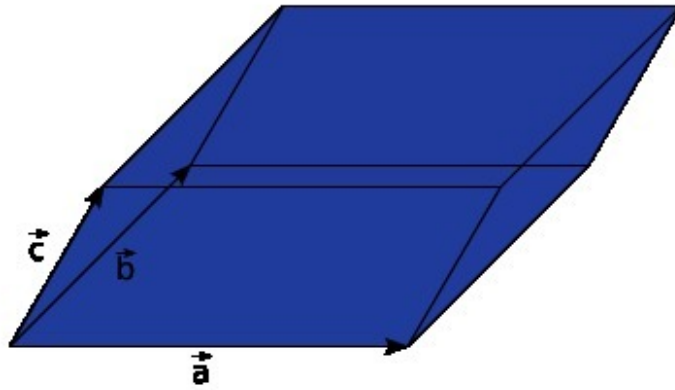


Figura 2.4: Il prodotto misto di tre vettori è l'area del parallelepipedo costruito su questi.

2.6 Componenti di un vettore

2.6.1 Scomposizione di un vettore

Scomporre un vettore significa esprimerlo come combinazione lineare (valgono le proprietà della somma e del prodotto per uno scalare viste in precedenza) di altri vettori. Nel piano, dati due vettori non paralleli, un vettore può essere scomposto mediante somma di due vettori paralleli ai due dati, come mostrato in figura 2.5 ; nel caso di vettori nello spazio, la scomposizione avviene in modo del tutto analogo, con l'unica differenza che il vettore viene ora scomposto in tre altri vettori.

In generale, data una base di vettori, un qualsiasi vettore può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \quad , \quad (2.7)$$

dove, in questo caso, gli α_i rappresentano le componenti .

La scomposizione di vettori è una procedura molto utilizzata in fisica , in particolare in statica per scomporre le forze lungo direzioni particolari (ad esempio parallele e perpendicolari a determinati vincoli).

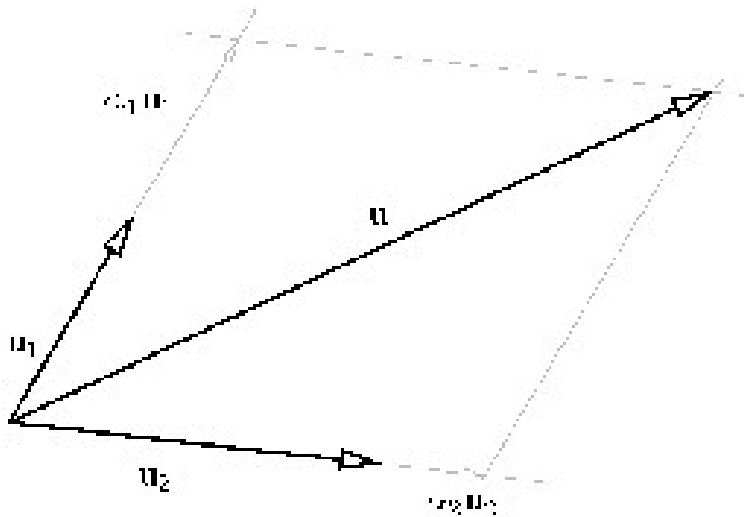


Figura 2.5: Rappresentazione grafica della scomposizione di un vettore

2.6.2 Coordinate Cartesiane

In fisica un "sistema di riferimento cartesiano" è un sistema di riferimento formato, in un numero "n" di dimensioni, da "n" rette ortogonali. In generale non è necessario che le rette siano ortogonali tra loro, ma i sistemi ortogonali sono in generale molto più semplici da usare, intersecantesi tutte in un punto chiamato "origine", su ciascuna delle quali si fissa un orientamento "rette orientate" e per le quali si fissa anche una unità di misura che consente di identificare qualsiasi punto del piano mediante numero numeri reali. Particolarmente importanti sono il caso in 2 dimensioni, nel qual caso il sistema di riferimento viene chiamato "piano cartesiano", vedi Figura 2.6, e quello in 3, usato per identificare la posizione di punti nello spazio.

2.6.3 Componenti cartesiane di un vettore

Un caso particolare di sistema di riferimento, è quello base ortonormale, in cui i vettori scelti come base sono tra loro ortogonali, e tutti di lunghezza unitaria. Nel caso del piano o dello spazio geometria euclidea, un tale sistema di coordinate è detto cartesiano, vedi Figura 2.7

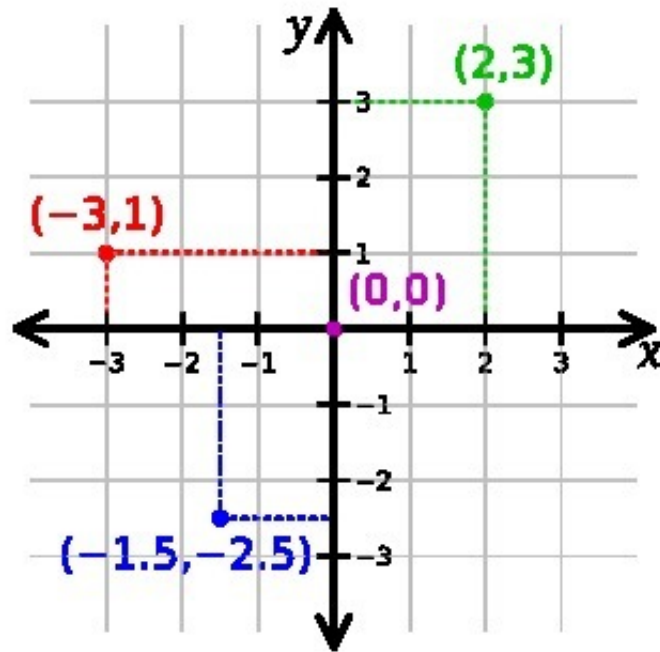


Figura 2.6: Rappresentazione di alcuni punti nel piano cartesiano

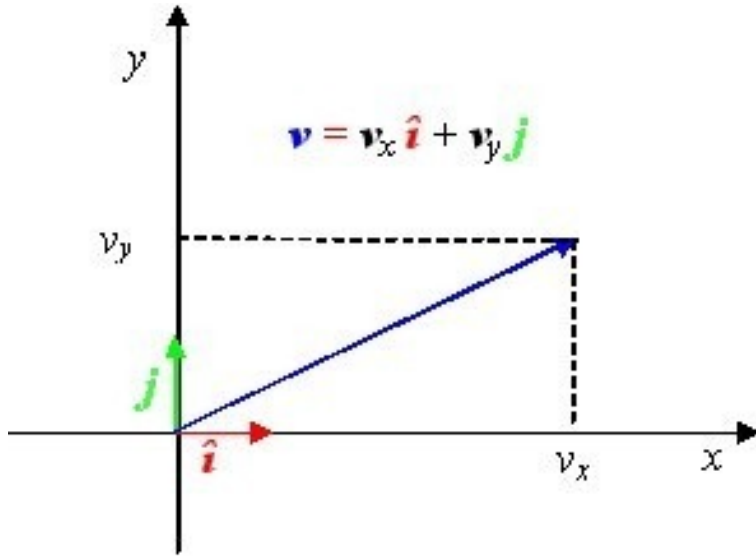


Figura 2.7: Rappresentazione grafica delle componenti cartesiane di un vettore

Un vettore viene dunque scomposto nelle sue componenti cartesiane e, convenzionalmente, i versori sono denominati con i simboli $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ rispettivamente per l'asse x , y e z . I versori sono tali che:

1. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
2. $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
3. $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

(per ricordare questi risultati, scrivere la prima riga $\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}$ e ruotarla verso sinistra sotto per due volte).

Un vettore può allora essere scritto come combinazione lineare dei versori canonici:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad , \quad (2.8)$$

con v_x , v_y e v_z componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$. Il modulo vale

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad . \quad (2.9)$$

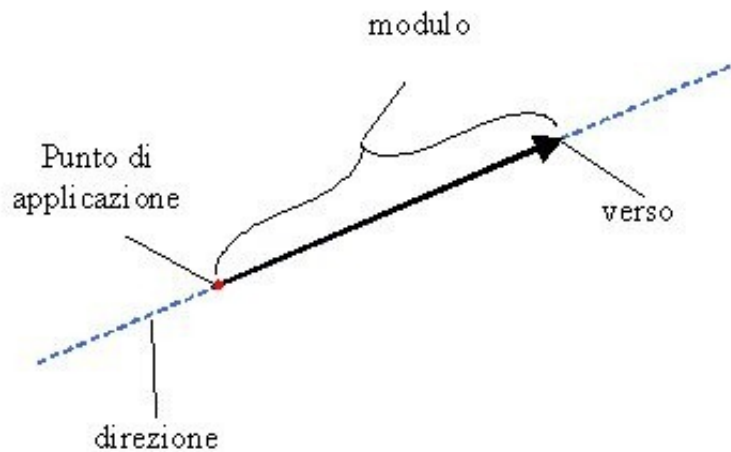


Figura 2.8: Rappresentazione grafica di un vettore applicato

2.7 Vettore libero e applicato

In molti contesti della fisica è importante tenere conto del *punto di partenza* di un vettore: questo accade per esempio nello studio delle forze e delle grandezze fisiche vettoriali. Si definisce dunque un vettore applicato come un segmento orientato nello spazio tridimensionale che unisce due punti precisi, detti punto di partenza o di applicazione e punto finale, vedi Figura 2.8. Gli elementi che caratterizzano un vettore applicato sono:

1. **direzione**: la retta su cui giace il segmento;
2. **verso**: uno dei due possibili versi su questa retta;
3. **punto di applicazione**: punto di inizio del segmento, ovvero il punto che precede tutti gli altri punti del segmento;
4. **modulo o intensità**: lunghezza del segmento.

Dunque due vettori applicati con stessa direzione, verso e modulo, ma con punti di applicazione distinti sono diversi. Un vettore applicato ad un punto A viene normalmente indicato con $\overrightarrow{AB}$. Il punto B può essere ottenuto come $A + \overrightarrow{AB}$, per cui $\overrightarrow{AB}$ è definibile come differenza dei due punti, analogamente alla relazione tra punti di uno spazio affine e vettori.

Capitolo 3

Equilibrio

3.1 Reazioni vincolari

Le forze chiamate "reazioni vincolari" sono quelle forze esercitate dai vincoli sui corpi. Tutti i corpi sulla Terra ricevono almeno una forza vincolare (es: pavimento). Il sistema è in equilibrio se la risultante è 0.

3.2 Esempio

L'equilibrio di una biglia posta su di un tavolo è mantenuto se la risultante di tutte le forze è uguale a zero.

$$\vec{R}_v + \vec{P} = 0 \quad , \quad (3.1)$$

$\vec{P}$: Forza peso della biglia

$\vec{R}_v$: Forza vincolare del tavolo

Ne deriva che:

$$\vec{R}_v = -\vec{P} \quad . \quad (3.2)$$

Capitolo 4

Cinematica del punto

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo.

La Cinematica è quel ramo della Meccanica Classica che studia il moto dei corpi materiali dal punto di vista puramente geometrico, senza occuparsi di modellare matematicamente le cause che hanno prodotto quel tipo particolare di moto. Di quest'ultimo aspetto si occupa la Dinamica che, in meccanica classica d'impostazione newtoniana, tratta le forze ed i loro effetti sul moto.

4.1 Tempo

Uno dei punti di partenza della Meccanica Classica è il postulato sull'esistenza del tempo come grandezza continua e uniforme. Queste caratteristiche sono individuabili intuitivamente dal senso comune e possono essere così delineate con una discussione di tipo fenomenologico-metafisico:

- Continuità del tempo: il tempo fluisce in modo continuo e non a scatti (come la lancetta dei secondi ad esempio) ovvero osserviamo la realtà come fluido divenire (Eraclito) e non fotogramma per fotogramma.
- Uniformità del tempo: il tempo fluisce in modo uniforme e sempre nello stesso verso, non si osservano infatti rapporti inversi di causa-effetto o fenomeni come il *deja-vu* cari alla letteratura fantascientifica. Per riassumere rigorosamente queste caratteristiche i fisici ed i matematici hanno coniato un postulato fondamentale

di esistenza del tempo che si può enunciare come segue: "Esiste il tempo una variabile continua sempre crescente"

4.2 Spazio

Allo stesso modo si individua un ente chiamato spazio che ha le proprietà di continuità (come il tempo) e isotropia. Per spiegare intuitivamente queste caratteristiche si può immaginare la continuità dello spazio come assenza di zone di inaccessibilità a meno che non siano già occupate da un corpo). Possiamo spostare con continuità un mobile senza trovare dinanzi ostacoli inspiegabili ed invisibili al suo moto. Ciò risulta possibile solo se lo spazio è dotato di continuità e non ha, per così dire, buchi. Ad esempio la materia di cui composto un formaggio svizzero non è continua. Non possiamo spostarci in un formaggio svizzero mantenendoci sempre nel formaggio e senza cadere in un buco. Se lo spazio reale avesse dei buchi, ovvero mancasse di continuità potrebbero verificarsi brusche cadute (senza alcuna causa) oppure inspiegabili barriere trasparenti. Bisogna anche dire che in realtà lontano dalla Terra e in prossimità dei buchi neri, lo spazio, come lo percepiamo sperimentalmente, perde la sua continuità. In prossimità di un buco nero infatti le traiettorie della luce che utilizziamo per fare le nostre misurazioni vengono deviate e la misura perde di significato nell'accezione della geometria euclidea. In questo caso possiamo supporre una perdita della continuità e dell'uniformità dello spazio che circonda il buco nero che pertanto viene indicato anche come una singolarità dello spazio. L'isotropia è l'assenza di direzioni preferenziali nello spazio, ovvero lo spazio ci appare con le stesse proprietà geometriche in tutti i luoghi. Se un oggetto è rettilineo questo oggetto non appare curvo o di lunghezza diversa se viene spostato in un punto differente dello spazio. Anche questa accezione dello spazio (isotropia) valida in Meccanica Classica ma non in generale in altre teorie Fisiche più generali. In Cinematica ci si occupa solo di spazi che non creano troppi problemi, anzi più esattamente di spazi euclidei tridimensionali e quindi si assume come postulato lo spazio continuo, isotropo, euclideo, tridimensionale. Sussiste quindi, come per il tempo, il postulato seguente "Esiste lo spazio ente continuo, isotropo ed euclideo"

4.3 Punto

La modellazione matematica del moto, passa per una idealizzazione dei corpi materiali come percepiti dall'esperienza comune. In Cinematica infatti i corpi materiali, estesi nello spazio tridimensionale per loro natura, sono idealizzati geometricamente come contratti in un solo punto geometrico (ente geometrico zero-dimensionale). Questa idealizzazione alla base del concetto di Punto Materiale che costituisce quindi una forte semplificazione della realtà tridimensionale ed estesa dei corpi materiali. La dinamica del corpo rigido descrive la complessità degli oggetti estesi come sistemi di punti materiali vincolati rigidamente consentendo una trattazione fisica completa dei corpi estesi. In Cinematica si semplifica l'approccio alla realtà utilizzando la nozione di Punto Materiale e quindi si dovrebbe utilizzare la dizione Punto Materiale in luogo di corpo proprio per sottolineare sempre il grado di idealizzazione descritto.

4.4 Traiettoria

Le posizioni successive occupate dal punto materiale nello spazio al variare del tempo costituiscono un insieme continuo di punti che prende il nome di Traiettoria del punto materiale nello spazio.

4.5 Spazio vettoriale

Se gli oggetti reali sono assimilati a punti materiali, lo spazio tridimensionale, reale così come ci appare dall'esperienza quotidiana, viene modellato matematicamente attraverso la nozione di Spazio vettoriale. Tale nozione ha una generalità così elevata da essere impiegata tanto in Fisica quanto in altre branche del sapere umano. Per quel che concerne la Cinematica, lo spazio vettoriale che si utilizza è quello tridimensionale ed euclideo. Lo Spazio Vettoriale non è altro che una coppia di insiemi che vengono dotati di operazioni con ben definite proprietà. Il primo insieme contiene degli elementi chiamati vettori che possono essere sommati secondo determinate regole che si vedranno successivamente. Il secondo insieme costituito da numeri (scalari) e viene definito il prodotto di uno scalare per un vettore utile per la modellazione di quantità Fisiche. Inoltre lo Spazio Vettoriale utilizzato in Cinematica

è anche euclideo ovvero è definito tramite una operazione di prodotto scalare da cui viene derivata una definizione di distanza tra due elementi che è equivalente alla distanza definita per i punti dello spazio geometrico euclideo (che a sua volta è definito dal Teorema di Pitagora e dall'utilizzo del metodo delle coordinate ideato da Cartesio). Ogni punto dello spazio reale è pertanto modellato come punto dello Spazio Vettoriale della Cinematica che per essere individuata sotto forma di vettore richiede la definizione di un punto di osservazione. Sia dunque P un punto generico dello spazio e O un punto di osservazione che per definizione è fisso. Il segmento orientato da O a P è rappresentativo del vettore dello Spazio Vettoriale che rappresenta lo spazio reale. È importante discernere le nozioni di segmento orientato e vettore. Il segmento orientato è solo la rappresentazione grafica del vettore così come la cifra 3 è solo il modo in cui si scrive il terzo numero naturale. Infatti tutti i segmenti orientati paralleli a $\overrightarrow{OP}$ ed aventi la stessa lunghezza e orientamento sono per definizione rappresentativi dello stesso vettore così come i numeri 2, $8/4$, $16/8$ sono differenti rappresentazioni del secondo numero naturale.

4.6 Vettore di posizione

Se O è la posizione dell'osservatore e P la generica posizione di un punto materiale nello spazio geometrico, si definisce vettore di posizione il vettore $\vec{r}$ rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{OP}$. Per indicare questa corrispondenza in questa trattazione si utilizzerà la scrittura $\vec{r} \sim \overrightarrow{OP}$. Il vettore di posizione dipende dalla scelta del punto di osservazione O ma la sua definizione permette di costruire delle quantità che sono indipendenti dalla scelta del punto di osservazione. Queste quantità sono la velocità e l'accelerazione vettoriale.

4.7 Posizione

Per definire la posizione di un corpo è necessario definire un Sistema di riferimento ad esempio una linea con sopra delle tacche e dei numeri oppure un sistema di due assi la cui origine è definita in qualche modo (esempio il centro del campo di calcio 'Delle Alpi' di Torino o qualsiasi altro a seconda della squadra o dello sport preferito). La mia attuale

posizione (ad esempio "definendo" asse X il senso della lunghezza del campo con i positivi verso nord e asse Y il senso della larghezza con i positivi verso est) (circa) $x=4577$ m ; $y=2314$ m . Si può definire lo spostamento in funzione del tempo facendo corrispondere ad ogni t una posizione (x,y) nel piano, oppure (x,y,z) nello spazio:

$$\vec{s}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad . \quad (4.1)$$

4.8 Moto rettilineo

Cominciamo analizzando un semplice moto lungo una retta detto appunto "moto rettilineo".

4.8.1 velocità

La rapidità con cui avviene lo spostamento lungo la traiettoria nel tempo determina una grandezza detta "velocità media" data dalla seguente relazione

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad . \quad (4.2)$$

Un esempio chiaro a tutti può essere quello del moto di un'automobile che percorre 60 Km in 30 minuti: essa avrà una velocità media di 120 Km/h. Possiamo chiederci quale potrebbe essere la velocità in ogni istante e per fare questo dovremo considerare piccolissimi intervalli di tempo, in pratica dovremo far tendere Δt a zero. La velocità così ottenuta è detta "velocità istantanea" che rappresenta la rapidità di variazione della posizione all'istante scelto.

Questa è data quindi da

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad , \quad (4.3)$$

e se volessimo trovare lo spazio percorso dall'istante iniziale all'istante t non dovremmo far altro che utilizzare le regole di integrazione e quindi

$$\begin{aligned} dx = v(t)dt &\Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t)dt \Rightarrow x - x_0 = \\ &\int_{t_0}^t v(t)dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Questa è la regola generale che mette in relazione la velocità con lo spazio percorso. Nel caso in cui la velocità fosse costante, si partisse al tempo $t_0 = 0$ e dall'origine del sistema di riferimento, cioè $x_0 = 0$, avremmo la relazione $x = vt$ che esprime un "moto rettilineo uniforme"

4.8.2 Accelerazione

Lo stesso ragionamento può essere fatto con la velocità infatti anch'essa potrebbe variare nel tempo ed il tasso di variazione dato da una grandezza chiamata "accelerazione". Anche per l'accelerazione possiamo definire una "accelerazione media" ed una "accelerazione istantanea" date dalle seguenti relazioni

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad e \quad a(t) = \frac{dv}{dt} \quad , \quad (4.5)$$

Anche per l'accelerazione, integrando otteniamo la relazione che la lega alla velocità

$$\begin{aligned} dv &= a(t)dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt \Rightarrow v - v_0 \\ &= \int_{t_0}^t a(t)dt \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

ed anche in questo caso se $v_0 = 0, a = \text{costante}$ e si partisse al tempo $t_0 = 0$ avremmo la relazione $a = v/t$ che definisce un "moto uniformemente accelerato". Combinando i risultati ottenuti e considerando v ed a costanti possiamo ottenere la legge che definisce il "moto uniformemente accelerato"

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad , \quad (4.7)$$

e se $t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad . \quad (4.8)$$

4.9 Moto armonico

Analizziamo ora un altro tipo di moto nel quale un corpo ripassa nella stessa posizione ad intervalli regolari e con la stessa velocità

Prendiamo un percorso chiuso come una circonferenza: in questo caso il punto ripassa dal punto di partenza dopo aver percorso in giro completo e quindi copre un angolo di 2π in un tempo T detto "periodo" e chiamiamo "frequenza" il numero di volte che esso percorre la circonferenza in un secondo. Diciamo quindi

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad e \quad \nu = \frac{1}{T} \quad , \quad (4.9)$$

dove ω la velocità del punto. Se analizziamo la traiettoria del punto possiamo notare che la sua posizione determinata da un angolo rispetto al centro della circonferenza stessa ed, al variare della posizione, l'angolo muta con una certa velocità. Seguendo ciò che abbiamo detto precedentemente per il moto rettilineo anche l'angolo (che possiamo equiparare allo spazio percorso) legato alla velocità di percorrenza sulla circonferenza da $\theta = \theta_0 + \omega t$. Analizziamo la posizione del corpo proiettata sull'asse delle ordinate. Se la circonferenza ha un raggio A il moto su di essa posizione data da

$$y(t) = A \sin(\omega t + \theta_0) \quad . \quad (4.10)$$

Notiamo che l'oscillazione della proiezione della posizione del punto attorno al centro della circonferenza ha un valore massimo equivalente al raggio della circonferenza chiamato "ampiezza".

Derivando la posizione otteniamo la velocità

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \theta_0) \quad , \quad (4.11)$$

che è massima quando il punto passa per il centro ovvero se

$$\cos(\omega t + \theta_0) = \pm 1 \Rightarrow \omega t = 0 + n\pi, \theta_0 = 0 + n\pi \quad . \quad (4.12)$$

L'accelerazione viene ricavata derivando la velocità

$$a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x \quad (4.13)$$

Da quest'ultima ricaviamo la condizione necessaria perchè un moto sia armonico e cioè

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (4.14)$$

Da questa possiamo dedurre che le funzioni seno e coseno e le loro combinazioni lineari sono in $\Re$ (campo reale) tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale ottenuta. Più in generale se abbiamo un'equazione del tipo

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + k^2 f = 0 \quad , \quad (4.15)$$

la soluzione è sempre

$$f(z) = A \sin(kz + \phi) \quad . \quad (4.16)$$

4.10 Moto nel piano

Estendiamo ora i concetti di moto nel caso che la traiettoria sia una linea curva su un piano. Ora non ci basta più sapere il valore numerico di uno spostamento ma ci deve interessare conoscerne anche la direzione ed il verso.

Questo è possibile se si utilizzano grandezze che hanno caratteristiche numeriche e direzionali che si chiamano "vettori".

4.10.1 Coordinate polari e cartesiane

Inoltre possiamo utilizzare due differenti sistemi di coordinate: "cartesiane" e "polari". La differenza sta nel fatto che le coordinate cartesiane sono date dalla proiezione della posizione del punto sugli assi cartesiani e quelle polari dalla distanza "r" del punto dall'origine degli assi chiamata "raggio vettore" e dall'angolo θ formato con l'asse delle ascisse. Le relazioni tra le coordinate sono le seguenti

$$x = r * \cos \theta \quad , y = r * \sin \theta \quad , r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \tan \theta = \frac{y}{x} \quad . \quad (4.17)$$

4.10.2 Posizione e velocità

Analizziamo ora la posizione di un punto in coordinate polari che in un tempo "t" percorre un tratto di traiettoria. Le posizioni sono $\overrightarrow{r(t)}$ ed $\overrightarrow{r(t + \Delta t)}$; la distanza tra di essi

$$\overrightarrow{r(t)} - \overrightarrow{r(t + \Delta t)} \quad , \quad (4.18)$$

e la velocità media data da

$$\frac{\vec{r}(t) + \vec{r}(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad . \quad (4.19)$$

Notiamo che la distanza dei punti non coincide con la traiettoria percorsa ma è solo la misura della distanza tra le due posizioni su un piano mentre la vera velocità lungo la traiettoria è $\frac{ds}{dt}$. Ma se noi facessimo tendere $\Delta t \rightarrow 0$, avremmo che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, ed il vettore $d\vec{r}$ diventerebbe tangente alla traiettoria e coinciderebbe in modulo con l'infinitesimo spostamento ds . Se ne ricava allora che

$$\vec{r} = ds * \vec{u}_T \quad (4.20)$$

dove $\vec{u}_T$ non è altro che il "versore" (un vettore unitario) che dà la direzione dello spostamento. Ricaviamo cosicchè

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} * \vec{u}_T = v * \vec{u}_T \quad (4.21)$$

e quindi possiamo dedurre che la velocità vettoriale individua in ogni istante la direzione ed il verso del movimento e ci dà la velocità istantanea $v = \frac{ds}{dt}$ con la quale viene percorsa la traiettoria. Analogamente a quanto detto per il moto rettilineo integrando l'espressione

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.22)$$

otteniamo quella generale che collega posizione e velocità data da

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \quad . \quad (4.23)$$

4.10.3 Accelerazione

Sempre rifacendosi agli stessi concetti generali troviamo l'espressione dell' accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad , \quad (4.24)$$

integrando ne segue che

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \quad . \quad (4.25)$$

L'attenzione va posta su un concetto che val la pena di ricordare: "La derivata di un versore e di un vettore". Nello svolgimento dei calcoli di derivazione di vettori spesso incontriamo la derivata di un versore che come ricordiamo è un vettore unitario ed è dato da

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_N \quad (4.26)$$

dove ϕ è l'angolo infinitesimo e $\vec{u}_N$ la componente normale alla direzione del versore. Per la derivata di un vettore abbiamo invece

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \vec{u} + a \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (4.27)$$

Nel caso dell' accelerazione per esempio svolgendo i calcoli abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(v\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_N \end{aligned} \quad (4.28)$$

Quindi l'accelerazione ha due componenti, una tangenziale data da $\frac{dv}{dt} \vec{u}_T$, ed una normale alla stessa data da $v \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_N$, che possiamo scrivere, ricordando che

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v \quad (4.29)$$

e che $ds = d\phi * R$, come

$$\frac{v^2}{R} \vec{u}_N \quad . \quad (4.30)$$

Possiamo quindi dire che

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad . \quad (4.31)$$

4.11 Moto circolare

A questo punto possiamo analizzare un moto che si svolge su di una circonferenza. Cominciamo con l'analizzare un moto a velocità costante. La costanza della velocità fa sì che il termine dell' accelerazione tangenziale $\frac{dv}{dt}$ sia nullo. In questo caso l'accelerazione è data solo da

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad . \quad (4.32)$$

Ricordiamo dal moto armonico che il periodo vale $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Nel caso vari anche il modulo della velocità abbiamo un contributo anche dalla accelerazione tangenziale. Questo ci permette di definire una quantità detta "accelerazione angolare" che è data da

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_T}{R} \quad . \quad (4.33)$$

A questo punto integrando avremo l' espressione della "velocità angolare" data da

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \quad , \quad (4.34)$$

ed integrando nuovamente anche l' espressione dell' angolo percorso

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad . \quad (4.35)$$

4.11.1 Velocità angolare - Notazione vettoriale

La velocità angolare può essere descritta da una quantità vettoriale che definisce il verso di percorrenza sulla circonferenza ed il modulo. La direzione di questo vettore è perpendicolare al piano del moto ed il verso è dato dalla regola della mano destra, ovvero dal vertice del vettore il moto deve apparire in senso antiorario

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad . \quad (4.36)$$

Questa relazione ci permette di ottenere l' accelerazione del moto circolare dalla velocità angolare e dall' accelerazione angolare tramite la seguente relazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.37)$$

e quindi

$$\vec{a} = \alpha \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad (4.38)$$

Capitolo 5

Dinamica

5.1 Significato

La dinamica cerca di trovare delle leggi che descrivano il moto di un corpo analizzato precedentemente con le leggi della cinematica. Abbiamo visto che un corpo che si muove cambia di posizione lungo una traiettoria ed abbiamo definito la velocità come la variazione del vettore posizione per unità di tempo rispetto a un sistema di riferimento. Ricordiamo che in assenza di velocità il corpo non si muove. Sembra una conclusione ovvia ma se continuiamo nella nostra analisi e consideriamo un corpo in movimento con una certa velocità variabile ci dobbiamo ricordare che abbiamo definito l'accelerazione come tasso di variazione della velocità per unità di tempo. Quindi ne segue che quando la accelerazione è nulla la velocità di un corpo rimane costante.

Anche un corpo fermo in un certo senso è in uno stato di moto con velocità nulla. Quindi la accelerazione da una misura della variazione dello stato di moto di un corpo.

5.2 Forza ed Inerzia

5.2.1 Principio d'inerzia (Galileo) o Prima legge di Newton

Ricordiamo che Aristotele nella sua Fisica del IV secolo a.C. asseriva che lo stato naturale dei corpi è la quiete, ossia l'assenza di moto, e che qualsiasi oggetto in movimento tende a rallentare fino a fermarsi, a

meno che non venga spinto a continuare il suo movimento Il principio di inerzia era già stato intuito da Leonardo Da Vinci (1452-1519) che nel suo libro Codice sul volo degli uccelli (f. 13 r.) inseriva la frase " Ogni moto attende al suo mantenimento, ovvero ogni corpo mosso sempre si move, in mentre che l'impressione della potentia del suo motore in lui si riserva".

Galileo Galilei (1564-1642) per primo stabilisce il "principio d'inerzia" per il quale "un corpo persevera nel suo stato di moto se non soggetto a forze" ma cos'è la forza? Intuitivamente la variazione di stato può essere provocata da una qualche interazione con il corpo in esame e quindi possiamo dire che la forza misura " l'interazione tra sistemi fisici". Più precisamente scrive Galileo nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632) : " il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, nè erta nè china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo. Ma questo, scrive ancora Galileo: deve intendersi in assenza di tutti gli impedimenti esterni e accidentari .

Il famoso trattato di Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* è pubblicato in latino il 5 luglio 1687 ed in inglese nel 1726 sulla base della terza versione in latino. Riportiamo il testo originale in latino della prima legge del moto " *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare* " , e quello in inglese " *Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a straight line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.* "

5.2.2 Seconda legge di Newton

Riportiamo il testo originale della seconda legge del moto come estratto dai *Principia* in latino (1686) " *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur,* " oppure dai *Principia* in inglese (1729) " *The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed ; and is made in the direction of the straight line in which that force is impressed.* "

Quello che viene espresso da Isaac Newton è la versione quantitativa di questo principio e si rende conto che il corpo è in un certo senso "restio" a cambiare il suo stato di moto e questa resistenza al cambia-

mento è proporzionale alla sua massa, definita "massa inerziale". La proporzionalità ed il rapporto con la forza è definito in chiave moderna dalla celebre formula

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad , \quad (5.1)$$

che può essere integrata ricordando la cinematica e quindi

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad . \quad (5.2)$$

Questo modo di interpretare la "seconda legge di Newton" ci permette quindi di legare le proprietà cinematiche del movimento alle cause che lo provocano.

A rigor di cronaca la seconda legge della dinamica non fu ricavata da Newton ma da Jacob Hermann nel suo libro *Phoronomia* (1716)

$$G = MdV : dt \quad , \quad (5.3)$$

dove G significa peso o gravità applicata ad una massa M .

5.2.3 Terza legge di Newton

Un'altra scoperta di Newton è il cosiddetto "principio di Azione-Reazione" che dice che "in un sistema di riferimento inerziale, un corpo soggetto ad una forza esercitata da un altro corpo reagisce con una forza eguale e contraria". Riportiamo il testo originale latino della terza legge del moto come estratto dai *Principia* " *Actioni contrariam semper & aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales & in partes contrarias dirigi* " , e quello in inglese " *To every action there is always opposed an equal reaction : or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.* "

Nei Principia di Newton troviamo poi il Corollario 1 che praticamente è la legge di composizione delle forze applicate in un punto tramite regola del parallelogramma, vedi figura 5.1, lo riportiamo in latino.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatim. Si corpus dato tempore, vi sola M , ferretur ab A ad B , & vi sola N , ab A ad C , compleatur parallelogrammum $ABDC$, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab A ad D . Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis

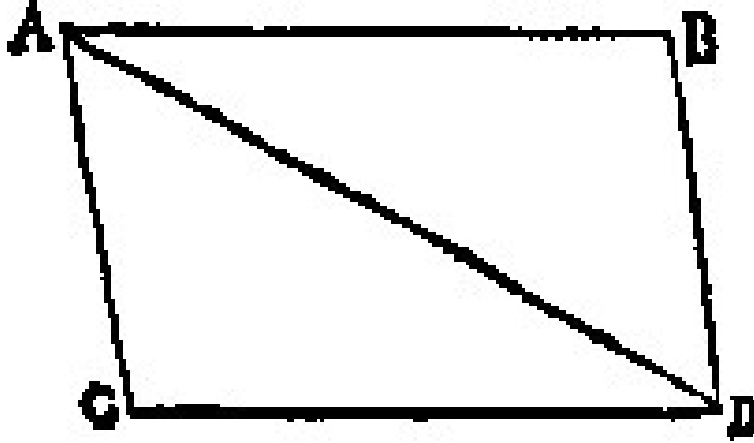


Figura 5.1: Schema della somma di due vettori risalente ai Principia di Newton

nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD sive vis N imprimatur, sive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD . Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD , & idcirco in utriusq; lineæ concursu D reperiri necesse est.

5.3 Quantità di Moto

Un'importante proprietà dei corpi in movimento (si ricorda che l'essere fermo è un tipo di moto) è data dalla "quantità di moto" ed è una quantità intrinseca del corpo data da

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad . \quad (5.4)$$

La quantità di moto è definita nella fisica classica come prodotto della massa per la velocità. È una grandezza vettoriale che ha importanti applicazioni negli urti: questa ci permette di riformulare la seconda legge di Newton come

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad , \quad (5.5)$$

per casi dove la massa potrebbe non essere costante.

Possiamo ora notare che se noi applichiamo al corpo una certa forza per un intervallo di tempo dt avremo una quantità chiamata "impulso" data da

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F} dt = d\vec{p} \quad , \quad (5.6)$$

e quindi possiamo dire che l'impulso di una forza provoca una variazione della quantità di moto del corpo. Ne va da se che in assenza di forze la quantità di moto di un corpo rimane costante, o come si dice "la quantità di moto si conserva".

Il Teorema dell'impulso mette in relazione le due grandezze appena definite:

$$\Delta \vec{p} = \vec{J} \quad . \quad (5.7)$$

Infatti, per come è definita la quantità di moto si ha che:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F} \quad , \quad (5.8)$$

e quindi

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \quad , \quad (5.9)$$

da cui

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad . \quad (5.10)$$

5.4 Azione delle forze

Riprendiamo la relazione principale della dinamica e proviamo a definire come una forza influenza il moto. Come abbiamo visto in cinematica l'accelerazione è data da $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ e quindi possiamo scrivere

$$\vec{F} = m \vec{a} = \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = m \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + m \frac{v^2}{R} \vec{u}_N \quad . \quad (5.11)$$

e notiamo come la forza "provochi" una accelerazione con due componenti, una tangenziale alla traiettoria ed una normale e diretta verso il centro di curvatura della traiettoria detta "accelerazione centripeta".

La forza quindi può essere divisa in due componenti: una da un contributo "tangenziale che provoca una variazione del modulo della

velocità", ed una diretta verso il centro di curvatura della traiettoria e quindi "ortogonale che determina una variazione della direzione della velocità e quindi del moto".

5.5 Equilibrio

Il concetto di equilibrio ora che sappiamo da cosa è provocato il movimento dovrebbe essere più chiaro.

Vi sono due possibili tipi di equilibrio: "equilibrio statico" che impone un'assenza di movimento ed "equilibrio dinamico" che comporta un "mantenimento" dello stato di movimento.

In entrambi i casi si tratta di una situazione nella quale "non vi sono variazioni dello stato del moto del corpo" e cioè la somma delle forze che agiscono sul corpo detta "risultante" deve essere nulla

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad , \quad (5.12)$$

ed il moto deve avvenire con velocità costante.

Quando un corpo soggetto a forze rimane fermo si può dedurre che in gioco vi sia una forza che bilancia le forze agenti.

Questa forza viene chiamata "reazione vincolare" e quindi per avere l'equilibrio vale la seguente

$$\vec{R} + \vec{N} = 0 \quad . \quad (5.13)$$

La reazione vincolare va definita di volta in volta esaminando lo stato del sistema.

5.6 Vari tipi di forze

Come abbiamo detto in precedenza vale sempre la formula $\vec{F} = m\vec{a}$ e quindi, conoscendo il tipo di forza applicato al corpo basta sostituire nella relazione l'espressione della forza in questione per ottenere un rapporto con l'accelerazione del corpo. Integrando otteniamo l'espressione della velocità ed integrando ancora otteniamo l'espressione dello spostamento e la traiettoria del corpo.

Bisogna "sempre" ricordare che abbiamo a che fare con quantità vettoriali e che quindi ogni grandezza dà dei contributi che scomposti

e proiettati sugli assi cartesiani del sistema di riferimento scelto danno le leggi del moto lungo le varie direzioni.

5.6.1 La forza peso

La forza di gravità imprime ai corpi una accelerazione che vale $\vec{g} = 9.8m/s^2$ ed è proporzionale alla massa del corpo secondo la formula $\vec{P} = m\vec{g}$ detta "forza peso".

5.6.2 La forza di attrito

La forza di attrito è generata dal contatto tra due corpi che si muovono uno rispetto all'altro.

A seconda del materiale del quale i corpi sono composti questa forza sviluppa una reazione al moto di intensità differente. La forza ha quindi da una dipendenza da un parametro che chiamiamo "coefficiente di attrito" ed indichiamo con μ

L'attrito è anche proporzionale alla reazione vincolare applicata al corpo e quindi possiamo scrivere la forma di questa forza come

$$\vec{F}_{at} = -\mu N \vec{u}_v \quad , \quad (5.14)$$

dove si evidenzia come sia diretta nel senso contrario al verso del moto dato dal segno negativo del versore della velocità. Il coefficiente di attrito può essere talmente elevato da impedire il movimento oppure solo frenarlo. Nel primo caso si parla di "coefficiente di attrito statico" mentre nel secondo caso di "coefficiente di attrito dinamico" con $\mu_s > \mu_d$

5.6.3 Forza elastica

Definiamo "forza elastica" una forza diretta sempre verso un punto detto centro e con modulo proporzionale alla distanza da esso. In pratica

$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x \quad . \quad (5.15)$$

Il moto che ne risulta è un moto oscillatorio armonico rispetto al centro e, come avevamo visto nel capitolo del moto armonico in cinematica la legge che regola un moto armonico è un'equazione differenziale

e quindi

$$\vec{F} = m \vec{a} = -kx\vec{u}_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad , \quad (5.16)$$

e quindi ne possiamo dedurre che $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Le posizioni sono date dalle soluzioni dell'equazione differenziale che abbiamo visto essere $x = A \sin(\omega t + \phi)$.

Differenziando otteniamo la velocità e differenziando ulteriormente abbiamo l'accelerazione.

5.6.4 Forze centripete

Una forza centripeta è una forza che ha la componente tangenziale alla traiettoria nulla.

Quindi il moto avviene lungo una traiettoria circolare sia perchè forzato da vincoli che sono provocati da forze centrali come quelle gravitazionali.

5.7 Piano inclinato

Uno dei più celebri esperimenti di Galileo è quello che riguarda il moto dei corpi su un piano inclinato. Come vedremo il piano inclinato permette di far muovere il corpo sotto una forza che, a seconda dell'inclinazione del piano, è minore della forza di gravità e quindi il moto si svolge più lentamente e quindi è più facile studiarlo.

Come abbiamo detto le forze vanno scomposte lungo gli assi cartesiani per valutare le leggi del moto. Nel caso del piano inclinato il corpo posto su di esso è soggetto alla forza di gravità ma, lungo il piano nel quale si compie il moto, la proiezione della forza peso vale $mg \sin(\theta)$ e quindi minore in modulo della forza di gravità effettiva.

La forza che imprime un'accelerazione al corpo è quindi minore e provoca una minore variazione della velocità e di conseguenza una più lenta percorrenza del piano inclinato.

In pratica abbiamo che $mg \sin \theta = ma$ e quindi $a = g \sin \theta$: il corpo scende con un' accelerazione minore di quella di gravità.

5.8 Pendolo Semplice

Il pendolo semplice è un sistema composto da un punto materiale appeso a un punto fisso tramite un filo teso di massa trascurabile.

Il punto percorre una traiettoria curva con raggio pari alla lunghezza del filo e quindi un tratto di una traiettoria circolare

$$m\vec{g} + \vec{T}_f = m\vec{a} \quad . \quad (5.17)$$

Come si è detto precedentemente le forze vengono scomposte lungo gli assi del sistema di riferimento centrato sul punto.

La forza peso ha una componente lungo la direzione del filo che viene controbilanciata dalla tensione del filo e quindi lungo questa direzione la risultante delle forze è uguale alla accelerazione centripeta e quindi

$$R_T = T_f - mg \cos \theta = ma_N = m \frac{v^2}{L} \quad , \quad (5.18)$$

mentre lungo la tangente alla traiettoria avremo

$$R_N = -mg \sin \theta = ma_T = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad . \quad (5.19)$$

Troviamo quindi che

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad , \quad (5.20)$$

che è l'equazione differenziale di un moto armonico. Per piccoli angoli possiamo utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor per la funzione

$$\sin \theta \quad (5.21)$$

che ci da

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \quad , \quad (5.22)$$

che arrestata al primo ordine ci da

$$\sin \theta \simeq \theta \quad . \quad (5.23)$$

Quindi possiamo scrivere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad , \quad (5.24)$$

e quindi la legge oraria del moto è

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad . \quad (5.25)$$

e che

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{g}} \quad . \quad (5.26)$$

Ricordando che

$$v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad (5.27)$$

possiamo ricavare la tensione del filo da

$$m \frac{v^2}{L} = T_f - mg \cos \theta \quad . \quad (5.28)$$

La cosa importante da notare è che il periodo del moto è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad , \quad (5.29)$$

e non dipende dall'ampiezza nel caso di piccole oscillazioni.

Possiamo quindi evidenziare l' "isocronismo delle piccole oscillazioni".

5.9 Lavoro e Energia

Il contributo di una forza applicata ad un corpo che si muove su di una traiettoria curvilinea è dato dall'integrale di linea di questa forza e quindi se il punto si sposta dal punto A al punto B possiamo scrivere

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad , \quad (5.30)$$

e chiamiamo questa nuova quantità "lavoro della forza". In effetti la quantità

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \theta ds = F_T ds \quad , \quad (5.31)$$

è la componente tangenziale del lavoro sulla traiettoria di tutte le forze agenti sul punto. I casi in cui il lavoro è nullo sono quelli dove non

agisce nessuna forza oppure la risultante delle forze è perpendicolare alla traiettoria così che

$$\cos \theta = 0 \quad . \quad (5.32)$$

Il tasso di variazione del lavoro esprime la rapidità di erogazione dello stesso ed introduce la grandezza chiamata "potenza" data quindi da

$$\frac{dW}{dt} = F_T v \quad . \quad (5.33)$$

5.9.1 Energia Cinetica

Dalla espressione del lavoro possiamo ricavare un'importante grandezza chiamata "energia cinetica" che ricaviamo direttamente da

$$dW = F_T ds = m a_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv \quad , \quad (5.34)$$

ed integrando otteniamo

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_k \quad (5.35)$$

dove

$$E_{k_i} = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad . \quad (5.36)$$

Si noti che l'energia cinetica è stata ricavata utilizzando la seconda legge di Newton e quindi ha validità generale ed inoltre è una caratteristica intrinseca del corpo; ovviamente è legata ad uno spostamento del corpo stesso come lo è il lavoro.

Un'altra espressione lega l'energia cinetica alla quantità di moto ed è la seguente

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \quad . \quad (5.37)$$

5.9.2 Energia potenziale

Ogni forza che agisce su un corpo che si muove genera lavoro, ma a volte il percorso seguito influisce su di esso ovvero può essere, come nel caso della forza peso o della forza elastica, che il lavoro dipenda solo dalla posizione iniziale e finale del moto mentre in altri casi, come in presenza di attriti, il percorso seguito introduce forze che contribuiscono in modo attivo e delle quali dobbiamo tenere conto. Le forze che NON

dipendono dal percorso seguito si dicono "forze conservative". Il lavoro delle forze conservative lungo un percorso chiuso risulta quindi nullo ovvero

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad . \quad (5.38)$$

La funzione che definisce il lavoro per forze conservative è data da

$$W = -\Delta E_p \quad , \quad (5.39)$$

dove

$$E_p \quad , \quad (5.40)$$

è detta "energia potenziale".

Va ricordato che il fatto che il lavoro lungo un percorso chiuso sia nullo è condizione per l'esistenza di una funzione delle coordinate alla quale posso applicare un operatore chiamato "gradiente" ed indicato con

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \quad . \quad (5.41)$$

Questo operatore dato uno scalare ritorna un vettore e quindi, in questo caso particolare, il gradiente della funzione energia potenziale ritorna le componenti cartesiane della forza in questione.

In questo caso

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad , \quad (5.42)$$

o in modo più compatto

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p = -\nabla E_p \quad . \quad (5.43)$$

5.9.3 Energia Meccanica

Le due formule che legano il lavoro, l'energia potenziale e quella cinetica possono essere unificate, ovviamente in presenza di sole forze conservative, per esprimere il concetto di conservazione dell' "energia meccanica" che definiamo come la somma dell'energia potenziale e quella cinetica di un sistema ed è data da

$$E_m = E_k + E_p = costante \quad . \quad (5.44)$$

Nel caso invece vi sia un contributo anche di forze non conservative allora notiamo che il lavoro è dato da

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} \quad . \quad (5.45)$$

Ricaviamo allora

$$W_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A} \quad , \quad (5.46)$$

ovvero in presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la differenza di essa coincide con il lavoro proprio delle forze non conservative.

5.10 Momenti

Introduciamo ora il concetto di momento di un vettore. Definiamo come "momento del vettore"

$$\vec{v} \quad , \quad (5.47)$$

applicato in un punto "P" ad una certa distanza da un punto "O" il vettore

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{v} \quad . \quad (5.48)$$

Il modulo è dato da

$$M_O = OPv \sin \theta = vd \quad , \quad (5.49)$$

dove θ è l'angolo formato dalla direzione del vettore $\vec{v}$ con la direzione di $\vec{OP}$ e quindi "d" non è altro che la distanza del punto "O" dalla direttrice di $\vec{v}$ e verrà chiamato "braccio".

Facciamo notare come il modulo, essendo dipendente da "d" e non da "OP", non dipende dal punto in cui viene applicato il vettore $\vec{v}$ lungo la sua direttrice.

A questo punto ritorniamo ai nostri concetti ormai familiari di forza e velocità e definiamo due concetti come il "momento angolare" ed il "momento di una forza"

5.10.1 Momento angolare

Presa la traiettoria di un corpo ed un punto fisso detto "polo" notiamo che rispetto a questo polo la velocità e la quantità di moto di un corpo sono vettori nello spazio ad una distanza $\vec{r}$ dal polo.

Possiamo definire allora un momento del vettore quantità di moto rispetto ad "O" in questo modo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad . \quad (5.50)$$

5.10.2 Momento della forza

Il momento di una forza ha l'espressione

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.51)$$

e possiamo notare che se vi sono più forze applicate in un punto vale

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} \quad (5.52)$$

Se consideriamo la variazione del momento angolare nel tempo allora possiamo scrivere

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5.53)$$

Nel caso che il polo "O" sia fermo la prima quantità è nulla in quanto il corpo avrebbe velocità

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad (5.54)$$

ed il prodotto vettoriale si annullerebbe. Il secondo termine coincide con la forza applicata moltiplicata vettorialmente per la distanza dal punto "O". Ricaviamo quindi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad . \quad (5.55)$$

Inoltre è importante notare il caso in cui la forza sia applicata lungo la stessa direttrice di $\vec{r}$ allora $\vec{M} = 0$ e di conseguenza $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ e quindi $\vec{L} = \text{costante}$.

Poniamo attenzione al valore di $\vec{L}$: sappiamo che vale

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} \quad , \quad (5.56)$$

ma

$$\vec{v} = \vec{v}_\theta + \vec{v}_r \quad . \quad (5.57)$$

In questo caso

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_\theta + \vec{v}_r) \quad , \quad (5.58)$$

e la parte $\vec{v}_r$ si annulla in un prodotto vettoriale con $\vec{r}$ in quanto paralleli lasciando quindi

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}_\theta \quad . \quad (5.59)$$

Il modulo vale

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad . \quad (5.60)$$

La costanza di $\vec{L}$ in un campo di forza centrale implica così la costanza del prodotto

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad (5.61)$$

e sarà la chiave per la condizione della costanza della velocità areale nella gravitazione newtoniana.

Capitolo 6

Moti relativi

Abbiamo iniziato lo studio della cinematica chiarendo il concetto che lo studio di un corpo in movimento e di conseguenza la definizione della sua traiettoria è possibile se definiamo a priori un certo sistema di riferimento rispetto al quale calcolare la posizione del corpo e derivarne le leggi del moto.

Le leggi fisiche ricavate valgono in questo primo sistema di riferimento ma nulla ci impedisce di prenderne in considerazione un altro rispetto al quale il corpo ha una posizione differente ma le leggi che regolano il moto sono dello stesso tipo. Quindi possiamo affermare che le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento ma per esse lo spazio è omogeneo ed isotropo, ovvero non vi è un punto privilegiato e nemmeno una direzione privilegiata per lo studio delle leggi fisiche.

Tutto questo vale se i due sistemi di riferimento sono fissi, ma nel caso uno fosse in moto relativo rispetto all'altro allora le cose cambiano: le leggi sono differenti nei due sistemi di riferimento.

Iniziamo col dire che presi due sistemi di riferimento con origine in "O" (fisso) ed "O'" (in moto) un punto "P" nello spazio ha una distanza $\vec{r}$ da "O" ed una distanza $\vec{r}_1$ da "O'".

Possiamo dire allora che

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}_1 \quad , \quad (6.1)$$

ed utilizzando le regole di derivazione dei versori e dei vettori e i concetti di relazioni tra spazio, velocità ad accelerazione cerchiamo di ottenere le relazioni vettoriali fondamentali per i due sistemi.

6.1 Velocità relativa

Iniziamo dalla velocità rispetto al sistema fisso: derivando abbiamo che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, quella rispetto ad "O' " è $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$ e quella del sistema "O' " rispetto ad " O " $\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$. Otteniamo quindi

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_1 + x' \frac{d\vec{u}_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}_z}{dt} \quad , \quad (6.2)$$

e ricordando che $\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_i$ otteniamo

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \quad . \quad (6.3)$$

Questa relazione è il "teorema delle velocità relative" La differenza tra le velocità dei due sistemi viene chiamata "velocità di trascinamento" e risulta

$$\vec{v}_t = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \quad . \quad (6.4)$$

Questo termine ha due componenti, una traslatoria legata a $\vec{v}_{O'}$ ed una rotatoria legata a $\vec{\omega}$, corrisponde in generale ad un "moto rototraslatorio".

6.2 Accelerazione relativa

Ora deriviamo da questa relazione per derivazione la formula dell'accelerazione

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_1 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1 \quad , \quad (6.5)$$

Questo è il "teorema delle accelerazioni relative". Analizziamo ora anche i termini di questa relazione: l' accelerazione di trascinamento è data da

$$\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_1 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1 \quad , \quad (6.6)$$

e l'ultimo termine è chiamato "accelerazione di Coriolis" data da $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1$.

6.3 Sistemi inerziali

Si definisce "sistema inerziale" un sistema dove un corpo non soggetto a forze mantiene il suo stato di moto ovvero un sistema dove vale la legge d'inerzia.

Un sistema in moto rettilineo uniforme non rotazionale rispetto al sistema fisso di riferimento ha le seguenti proprietà

$$\vec{v}_{O'} = \text{costante} \quad , \quad \vec{\omega} = 0 \quad , \quad \vec{a}_{O'} = 0 \quad , \quad (6.7)$$

e quindi dalle relazioni ricavate precedentemente ricaviamo che l'accelerazione nel sistema in moto vale $\vec{a}_1 = \vec{a}$ e quindi ne ricaviamo un risultato fondamentale: "Preso un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto al primo sono anche loro sistemi inerziali".

Se invece il moto del secondo sistema non è rettilineo uniforme allora siamo in presenza di un contributo dato dalla forza effettiva chiamata "forza vera" e da "forze apparenti" date dalle accelerazioni di trascinamento e da quella di Coriolis.

Infatti riportando il risultato ottenuto per l'accelerazione alla seconda legge di Newton, se nel primo sistema abbiamo

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (6.8)$$

nel secondo avremo

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_t + \vec{a}_c \quad , \quad (6.9)$$

e cioè in un sistema non inerziale abbiamo il contributo delle "forze apparenti".

Capitolo 7

Dinamica sistemi

7.1 Forze

Abbiamo parlato nella dinamica del punto del comportamento di un corpo sottoposto all'azione di forze. Ora analizziamo la situazione nella quale diversi punti fanno parte di un sistema complesso e tra di essi vi sono sia forze esterne al sistema sia forze interne, cioè forze che agiscono solo all'interno del sistema e sono generate all'interno del sistema stesso. Un esempio può essere quello del sistema solare: nel sistema vi sono forze che si sviluppano tra i costituenti del sistema ovvero i pianeti. Se restringiamo il sistema alla coppia Terra-Luna vediamo come tra la terra ed il suo satellite vi sono forze interne ma nel moto complessivo la forza gravitazionale del sole è considerata come forza esterna al sistema.

In un sistema di punti ognuno di essi contribuisce con le sue quantità intrinseche al comportamento generale del sistema e quindi per quanto riguarda la quantità di moto il sistema avrà $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i m \vec{v}_i$, per l'energia cinetica $E_k = \sum E_{k,i} = \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2$ e se consideriamo un punto qualsiasi nel sistema inerziale l'espressione del momento angolare del sistema diventa

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{m}_i \vec{v}_i \quad . \quad (7.1)$$

7.2 Centro di massa

La scelta di un punto di riferimento per lo studio del moto del sistema ci porta a considerare un particolare punto che ha delle caratteristiche che

ci permetteranno di facilitare una serie di espressioni e di semplificare lo studio di alcuni casi di moto: questo punto (che potrà essere a volte considerato anche come l'origine del sistema di riferimento) si chiama "centro di massa".

La posizione è data da

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} , \quad (7.2)$$

e tiene conto in un certo senso (è una media pesata) del contributo delle singole masse di ciascun punto: masse maggiori contribuiscono in maniera preponderante.

Un esempio potrebbe essere il nostro sistema solare considerato un centro del sistema di riferimento un punto al di fuori di esso: la posizione del centro di massa sarebbe quasi coincidente con quella del nostro sole che ne detiene il 99% della massa totale.

L'utilità del centro di massa risulta chiara se noi proviamo a calcolarne la velocità e l'accelerazione; otteniamo infatti per la velocità la seguente espressione

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM} &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \\ &= \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{P}}{m_{tot}} , \end{aligned} \quad (7.3)$$

che esprime il fatto che "il centro di massa ha la stessa quantità di moto dell'intero sistema" ed è come se tutta la massa fosse concentrata in esso.

Lo stesso ragionamento vale per l'accelerazione ed otteniamo lo stesso risultato che, integrato con la seconda legge di Newton ci da

$$m \vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i^{est} + \sum_i \vec{F}_i^{int} = \vec{R}^{est} + \vec{R}^{int} . \quad (7.4)$$

7.2.1 Quantità di moto

Possiamo notare che le forze interne ad un sistema seguono la terza legge di Newton ovvero il principio di azione e reazione per cui sono

a due a due eguali e contrarie, quindi si annullano ed $\overrightarrow{R^{int}} = 0$. La relazione che ne deriva è il cosiddetto "teorema del centro di massa":

$$\overrightarrow{R^{est}} = m\overrightarrow{a_{CM}} = m_{tot} \frac{d\overrightarrow{v_{cm}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} \quad , \quad (7.5)$$

ovvero "il centro di massa si muove come se la massa totale del sistema sia concentrata in esso e ad essa sia applicata la risultante delle sole forze esterne". È importante notare che se un sistema non è influenzato da forze esterne allora $\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = 0$ e ne segue che $\overrightarrow{P} = costante$ quindi si può dire che "in un sistema isolato vi è una conservazione della quantità di moto".

7.2.2 Momento angolare

Un altro aspetto importante dell'utilizzo del centro di massa come origine del sistema di riferimento è l'analisi del momento angolare del sistema.

Abbiamo visto che il sistema può essere influenzato da forze esterne ed interne; se consideriamo un polo ed analizziamo i due momenti delle forze totali abbiamo che $\overrightarrow{M^{est}} = \sum_i \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{est}}$ ed analogamente $\overrightarrow{M^{int}} = \sum_i \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i^{int}}$. Il fatto che le forze interne siano uguali e contrarie fa sì che abbiano la medesima direttrice e quindi il loro momento totale è nullo.

Il momento angolare del sistema è dato da

$$\overrightarrow{L} = \sum_i \overrightarrow{r_i} \times m_i \overrightarrow{v_i} \quad , \quad (7.6)$$

e la sua derivata rispetto al tempo è

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} \times m_i \overrightarrow{v_i} + \sum_i \overrightarrow{r_i} \times m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} \quad , \quad (7.7)$$

(ricordando sempre le regole di derivazione dei vettori). Ricordando che $m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = m_i \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{F_i}$ e che $\overrightarrow{M^{int}} = 0$ otteniamo la seguente relazione

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{M^{est}} - \overrightarrow{v_O} \times m\overrightarrow{v_{CM}} \quad . \quad (7.8)$$

Nel caso di un polo fisso o coincidente con il centro di massa otteniamo il "teorema del momento angolare"

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{est} \quad . \quad (7.9)$$

cioè che "il momento angolare, in questi casi, dipende solo dai momenti delle forze esterne".

Ne va da se che se il momento delle forze esterne è nullo allora $\vec{L} = \text{costante}$ ed abbiamo una conservazione del momento angolare.

7.3 Sistema CM

Possiamo ora considerare il caso in cui si utilizzi il centro di massa come origine del sistema di riferimento. Quello che avviene è che gli assi non variano la direzione ed utilizzando le regole viste nel capitolo dei moti relativi senza i termini riguardante la rotazione otteniamo che $\vec{r}_{CM} = 0$ e che $\vec{v}_{CM} = 0$ e quindi anche la quantità di moto totale calcolata rispetto al centro di massa è nulla; inoltre essendo anche $\vec{a}_{CM} = 0$ anche il momento risultante è uguale al solo contributo delle forze esterne "vere" e non ha termini "apparenti" dovuti alle forze d'inerzia.

7.4 Teoremi di Konig

Ora non ci rimane altro che legare il sistema di riferimento inerziale con il sistema del centro di massa. Ci vengono in aiuto per questo due teoremi che analizzano il comportamento del momento angolare il primo e dell'energia cinetica il secondo. In sostanza il punto di partenza è che per il moto relativo del sistema del centro di massa abbiamo che per ogni punto $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_{CM}$ e per la velocità $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{CM}$.

7.4.1 Primo teorema di Konig

Dall'espressione

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad , \quad (7.10)$$

e sostituendo ne risulta che

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_{CM} \quad , \quad (7.11)$$

ovvero "il momento angolare di un sistema è la somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa e del momento angolare riferito ad esso".

7.4.2 Dimostrazione

Dall'espressione

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad , \quad (7.12)$$

e sostituendo

$$\vec{r}_i = \vec{r}_1 + \vec{r}_{CM} \quad , \quad (7.13)$$

e

$$\vec{v}_i = \vec{v}_1 + \vec{v}_{CM} \quad , \quad (7.14)$$

risulta

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_1 + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_1 + \vec{v}_{CM}) \quad , \quad (7.15)$$

sviluppando

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_1 \times m_i \vec{v}_1 + \sum_i \vec{r}_1 \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_1 + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} \quad , \quad (7.16)$$

con

$$\sum_i \vec{r}_1 \times m_i \vec{v}_1 = \vec{L}_1 \quad , \quad (7.17)$$

$$\sum_i \vec{r}_1 \times m_i \vec{v}_{CM} = \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_1 = 0 \quad , \quad (7.18)$$

$$\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} = \vec{L}_{CM} \quad . \quad (7.19)$$

Risulta quindi

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_{CM} \quad . \quad (7.20)$$

7.4.3 Secondo teorema di Konig

Analogamente per l'energia cinetica otteniamo, utilizzando gli stessi concetti che

$$E_k = E_{k,1} + E_{k,CM} \quad , \quad (7.21)$$

ovvero "l'energia cinetica di un sistema è la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella rispetto ad esso".

7.4.4 Dimostrazione

Dall'espressione

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 \quad , \quad (7.22)$$

e sostituendo $v_i = v_1 + v_{CM}$ risulta

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m (v_1 + v_{CM})^2 \quad , \quad (7.23)$$

che è anche

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m (v_1 + v_{CM})(v_1 + v_{CM}) \quad , \quad (7.24)$$

sviluppata risulta

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{1}{2} m (v_1 v_1) + \sum_i \frac{1}{2} m (v_1 v_{CM}) + \\ &\quad \sum_i \frac{1}{2} m (v_{CM} v_1) + \sum_i \frac{1}{2} m (v_{CM} v_{CM}) \quad , \end{aligned} \quad (7.25)$$

con

$$\sum_i \frac{1}{2} m (v_1 v_1) = E_{k,1} \quad , \quad (7.26)$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m (v_1 v_{CM}) = \sum_i \frac{1}{2} m (v_{CM} v_1) = 0 \quad , \quad (7.27)$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m (v_{CM} v_{CM}) = E_{k,CM} \quad . \quad (7.28)$$

Risulta quindi

$$E_k = E_{k,1} + E_{k,CM} \quad . \quad (7.29)$$

7.5 Energia cinetica

Come abbiamo visto in precedenza all'inizio del modulo l'energia cinetica è data dalla somma delle energie cinetiche dei punti costituenti il sistema.

Sappiamo però che l'energia cinetica è legata al lavoro tramite la relazione

$$W = \Delta E_k \quad , \quad (7.30)$$

ma nel caso di più punti materiali il lavoro viene fatto dalle forze esterne ed anche da quelle interne se vi è una variazione delle posizioni reciproche dei corpi e quindi l'espressione generale diventa

$$W^{est} + W^{int} = \Delta E_k \quad , \quad (7.31)$$

dove

$$\Delta E_k \quad , \quad (7.32)$$

è l'energia cinetica totale. Vale anche per il sistema di punti che, nel caso le forze interne e le forze esterne siano conservative si ha una conservazione dell'energia cinetica totale con

$$W = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E_M = costante \quad . \quad (7.33)$$

Anche in questo caso se una delle due risultanti delle forze esterne od interne non è conservativa il lavoro è espresso dall'espressione

$$W_{nc} = \Delta E_m \quad . \quad (7.34)$$

7.6 Urti

Se due corpi interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo durante quale si analizza il sistema possiamo parlare di "urto". Il fatto che il tempo di interazione sia molto breve è fondamentale per il fatto che altrimenti ci sarebbe da considerare anche la forza in gioco durante l'urto e quindi un contributo di un impulso non trascurabile.

Non essendoci forze esterne che agiscono durante l'urto possiamo parlare di "conservazione della quantità di moto del sistema".

7.6.1 Urti completamente anelastici

Nell'urto "completamente anelastico" i due corpi proseguono insieme nel loro moto. Si può dire allora studiando la quantità di moto che si conserva che

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM} \quad , \quad (7.35)$$

in quanto il centro di massa ha la stessa posizione dei corpi uniti.

Anche l'energia cinetica del sistema vale

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 - \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) \quad , \quad (7.36)$$

e possiamo notare che l'energia cinetica dopo l'urto è minore di quella prima dello stesso. L'energia "persa" è stata spesa per unificare i corpi all'atto dell'urto.

7.6.2 Urti elastici

Un urto si dice "elastico" quando l'energia cinetica viene conservata dopo l'urto ed i due corpi proseguono immutati il loro moto e cioè

$$12m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2 \quad , \quad (7.37)$$

In generale in un urto una parte di quantità di moto viene scambiata e possiamo chiamare "coefficiente di restituzione" il valore

$$e = -\frac{P_{1,finale}}{P_{1,iniziale}} = -\frac{v_{1,finale}}{v_{1,iniziale}} = -\frac{P_{2,finale}}{P_{2,iniziale}} = -\frac{v_{2,finale}}{v_{2,iniziale}} \quad , \quad (7.38)$$

e vale anche

$$E_{k,finale} = e^2 E_{k,iniziale} \quad . \quad (7.39)$$

Il valore di e varia da 0 (urto completamente anelastico) a 1 (urto elastico) e nel caso intermedio l'urto si dice "anelastico" che è il caso più comune.

Capitolo 8

Gravitazione

8.1 Storia

Quando nel 1687 Newton pubblica i "Principia" e decreta la nascita della teoria della gravitazione chiude una disputa che nasce con Aristotele (384-322 a.C.) e la sua visione della Terra al centro dell'universo e si trascina nei secoli attraverso la visione geocentrica di Tolomeo (140 a.C.), eliocentrica di Copernico (1473-1543) e le tre leggi di Keplero (1571-1630) si pongono le basi per la soluzione newtoniana.

Le leggi di Keplero sono le seguenti:

8.1.1 Prima Legge di Keplero

I pianeti percorrono orbite ellittiche attorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'orbita.

8.1.2 Seconda Legge di Keplero

La velocità areale con cui il raggio vettore spazza l'orbita è costante

8.1.3 Terza Legge di Keplero

Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ovvero

$$T^2 = kr^3 \quad . \quad (8.1)$$

Keplero ci da una descrizione che descrive il moto ma non le cause che lo provocano. A risolvere questo problema ci pensa Newton che comprende come le stesse leggi che regolano la caduta della celeberrima mela sono le stesse regolano il moto dei corpi celesti. In un colpo solo Newton trova una legge di validità universale che ancora oggi, a basse velocità, è ancora perfettamente valida.

8.2 Gravitazione Universale

Quello che si è detto nella dinamica del punto riguardo la costanza del momento angolare in un campo di forze centrali è fondamentale: una forza che permetta ad un corpo di muoversi su di una traiettoria circolare con velocità costante deve essere "solo" centripeta e quindi diretta verso il centro di curvatura.

Quindi avremo che

$$F = ma = m\omega^2 r = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . \quad (8.2)$$

Ora utilizziamo la terza legge di Keplero ed otteniamo che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza infatti

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2} . \quad (8.3)$$

Se consideriamo due pianeti e che per la terza legge di Newton la forza esercitata dal primo sul secondo provoca una forza di intensità uguale in modulo e di verso contrario abbiamo che

$$\frac{4\pi^2 m_1}{k_1 r_1^2} = \frac{4\pi^2 m_2}{k_2 r_2^2} , \quad (8.4)$$

da ciò risulta

$$m_1 k_2 = m_2 k_1 \quad (8.5)$$

e definendo come

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_1 k_2} = \frac{4\pi^2}{m_2 k_1} , \quad (8.6)$$

concludiamo che

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} , \quad (8.7)$$

e vettorialmente

$$\overrightarrow{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u}_{1,2} \quad , \quad (8.8)$$

è questo infine il cuore dell'ipotesi di Newton. La determinazione diretta di *gamma* , che è una costante universale caratteristica dell'interazione gravitazionale è dovuta a Cavendish nel 1798 e vale

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \quad . \quad (8.9)$$

8.3 Campo gravitazionale

La formula della gravitazione universale permette di isolare il contributo che deriva da una delle due masse nel senso che la possiamo scrivere come

$$\overrightarrow{F}_{1,2} = (-\gamma \frac{m_1}{r^2} \overrightarrow{u}_{1,2}) m_2 = m_2 \overrightarrow{G}_1 \quad , \quad (8.10)$$

con

$$\overrightarrow{G}_1 = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \overrightarrow{u}_{1,2} \quad . \quad (8.11)$$

Il vettore $\overrightarrow{G}$ viene chiamato "campo gravitazionale" e possiamo dire che una massa modifica lo spazio circostante. Corpi che entrano in questa regione risentono dell'influenza della massa generatrice. Una delle prime osservazioni di un campo gravitazionale fu la lastra fotografica scattata da Eddington nel 1919 alla ricerca di una conferma della teoria della relatività generale di Einstein. Il fatto che la massa generi una effettiva modifica geometrica del continuo spazio-temporale è argomento della relatività generale.

8.4 Lavoro

Calcoliamo il lavoro di una forza gravitazionale

$$dW = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u} d\overrightarrow{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\Delta E_p \quad , \quad (8.12)$$

Otteniamo l' espressione dell' "energia potenziale gravitazionale"

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad . \quad (8.13)$$

Questa espressione, se noi prendiamo come convenzione che all'infinito $E_p = 0$ e $F = 0$, notiamo che avvicinandosi ad una massa che genera un campo gravitazionale il lavoro è positivo e quindi si acquista energia cinetica e di conseguenza velocità .

Anche in questo caso isoliamo il contributo di una delle due masse ed otteniamo

$$V = -\gamma \frac{m}{r} \quad , \quad (8.14)$$

e di conseguenza

$$\vec{G} = -\overrightarrow{grad}V = -\nabla V \quad , \quad (8.15)$$

come ci si doveva aspettare in presenza di un campo conservativo.

Capitolo 9

Dinamica corpo

9.1 Corpo rigido

Un sistema di punti che mantengano la distanza reciproca viene chiamato "corpo rigido"; ovviamente questa è sempre una semplificazione per permetterci di trattare alcune caratteristiche del moto di un corpo.

Non variando le distanze tra i punti la risultante delle forze interne al sistema sono nulle e quindi la variazione dell'energia cinetica durante il moto è dovuta solo alle forze esterne. Abbiamo quindi che

$$\vec{R} = m\vec{a}_m, \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, W = \Delta E_k \quad . \quad (9.1)$$

Possiamo scomporre il moto di un corpo rigido in due tipi di moto, uno traslatorio ed uno rotatorio. La traslazione è legata alla velocità $\vec{v}_{CM}$ del centro di massa e la rotazione alla velocità angolare $\vec{\omega}$.

9.2 CM corpo rigido

Anche per il centro di massa riprendiamo i concetti visti per l'insieme di punti ma, considerando la continuità di un corpo rigido le sommatorie vengono sostituite da integrali e quindi

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m_i} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{m} \quad , \quad (9.2)$$

considerando che $m = \rho V$.

9.3 Momenti

Consideriamo un asse di rotazione: i punti percorrono durante la rotazione una traiettoria circolare con velocità $v_i = \omega R_i$. La proiezione del momento angolare sull'asse di rotazione risulta così

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega \quad . \quad (9.3)$$

9.3.1 Momento angolare

La somma dei momenti angolari è data da

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_i m_i R_i^2) \omega = I_z \omega \quad . \quad (9.4)$$

La quantità I_z è il "momento d'inerzia" rispetto all'asse di rotazione. Quello che possiamo notare è che la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione dipende dalla forma del corpo, cioè dalla posizione dei singoli punti rispetto all'asse di rotazione ed un coefficiente che è proprio di ogni corpo.

Nel caso in cui $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, ovvero quando l'asse di simmetria coincide con l'asse di rotazione allora

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}, L = L_z, L_{\perp} = 0 \quad . \quad (9.5)$$

Per questo caso particolare abbiamo anche che

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \alpha \quad , \quad (9.6)$$

e quindi

$$\vec{M} = I_z \vec{\alpha} \quad . \quad (9.7)$$

Possiamo fare un paragone con la nota formula

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad , \quad (9.8)$$

e possiamo notare che, mentre la massa inerziale è la misura dell'opposizione del corpo alla modifica del suo stato di moto, il momento d'inerzia è l'opposizione del corpo allo stato di rotazione. La differenza fondamentale è che mentre la massa è una quantità definita del corpo, il momento d'inerzia dipende dalla scelta dell'asse di rotazione.

9.3.2 Momento d'inerzia

Abbiamo detto che il "momento d'inerzia dipende dalla forma del corpo" e dalla posizione dell'asse di rotazione. Il calcolo viene effettuato dalla seguente formula dove

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV \quad , \quad (9.9)$$

e quindi il momento d'inerzia è la somma di tutti i momenti d'inerzia rispetto al medesimo asse. Solo per un esempio calcoliamo il momento d'inerzia di un'asta sottile omogenea. Detta S la sezione dell'asta, d la lunghezza dell'asta e dx , la distanza dal centro con $dm = \rho S dx$ abbiamo che

$$I_z = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dm = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S d^3 = \frac{1}{12} m d^2 \quad . \quad (9.10)$$

9.4 Energia cinetica

Calcoliamo ora l'energia cinetica del corpo rigido che risulta uguale a

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 \quad , \quad (9.11)$$

e vale sempre che il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica ovvero

$$W = \Delta E_k \quad . \quad (9.12)$$

9.5 Huygens-Steiner

Quando l'asse di rotazione non passa dal centro di massa del corpo il calcolo del momento d'inerzia potrebbe essere complicato in quanto vengono meno le condizioni di simmetria. Ci viene in aiuto il teorema di Huygens-Steiner che ci dice che il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse parallelo all'asse su cui si calcola I_c che si trova ad una distanza d , centro di massa è dato da

$$I = I_c + m d^2 \quad (9.13)$$

9.6 Pendolo composto

Chiamiamo pendolo composto un corpo rigido che oscilla attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa. Il momento della forza peso è dato da

$$M = -mgh \sin \theta = I_z \alpha = I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} . \quad (9.14)$$

Ne segue che

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin \theta = 0 , \quad (9.15)$$

che è l'equazione del moto armonico. Come sappiamo la soluzione di questa equazione differenziale, per piccoli angoli ovvero con l'approssimazione $\sin \theta \approx \theta$, è data da

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t + \phi . \quad (9.16)$$

La pulsazione è

$$\omega = \sqrt{mgh/I_z} , \quad (9.17)$$

e se poniamo

$$l = I_z/mh , \quad (9.18)$$

dove l , è la "lunghezza ridotta del pendolo composto" ovvero la lunghezza che avrebbe un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo. Ricordiamo anche che

$$I_z = I_c + mh^2 , \quad (9.19)$$

dato dal teorema di Huygens-Steiner visto che il corpo rigido oscilla attorno ad un asse che non coincide con il centro di massa.

9.7 Moto di puro rotolamento

Un altro caso di moto di un corpo rigido è il tipico moto di una ruota ovvero un moto di puro rotolamento. In questo caso l'asse di rotazione non è un asse materiale ma geometrico, ovvero si sposta insieme al corpo rigido. Il corpo ruota così attorno al punto di contatto con il piano che rimane fermo e quindi è sottoposto ad una forza di attrito statico.

Capitolo 10

Formulario di Fisica I

10.1 Cinematica

10.1.1 Moto 1D

spostamento : $\Delta x = x_2 - x_1$

velocità media: $v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, velocità istantanea: $v = \frac{dx}{dt}$

accelerazione media: $a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, accelerazione istantanea: $a = \frac{dv}{dt}$

equazione cinematica 1: $v = v_0 + at$

equazione cinematica 2: $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

equazione cinematica 3: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

equazione cinematica 4: $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$

equazione cinematica 5: $x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$

10.1.2 Moto del proiettile

equazione cinematica 1: $x - x_0 = (v_0 \cos \theta)t$

equazione cinematica 2: $y - y_0 = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

equazione cinematica 3: $v_y = v_0 \sin \theta - gt$

equazione cinematica 4: $v_y^2 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2g(y - y_0)$

10.2 Leggi di Newton

forza $F = ma$, Peso $W = mg$

condizioni per l' equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$

condizioni di non equilibrio $\sum F_x = ma_x$, $\sum F_y = ma_y$, $\sum F_z = ma_z$

forza di attrito statico $f_s \leq \mu_s F_n$, forza di attrito cinematico $f_k = \mu_k F_n$

10.3 Lavoro ed energia

lavoro : $W = F \cos \theta \Delta x$, lavoro $\theta = 0$: $W = F \Delta x$

energia potenziale : $U = mgy = mgh$

energia potenziale nella molla: $U_s = \frac{1}{2} kx^2$

energia cinetica : $K = \frac{1}{2} mv^2$

teorema lavoro energia : $W_{net} = K_f - K_i$

conservazione dell' energia : $K_i + U_i = K_f + U_f$

lavoro non conservativo : $W_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$

potenza : $P = \frac{E}{t} = Fv$

10.4 Conservazione del momento e collisioni

momento: $p = mv$, impulso = $F \Delta t$

teorema impulso momento : $F \Delta t = \Delta p = mv_f - mv_i$

conservazione del momento nelle collisioni: $\sum (mv)_{initial} = \sum (mv)_{final}$

10.5 Moto rotazionale

equazione rotazionale 1 : $\omega = \omega_0 + \alpha t$

equazione rotazionale 2 : $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

equazione rotazionale 3 : $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

equazione rotazionale 4 : $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$

equazione rotazionale 5 : $\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2$

velocita` tangenziale : $v_t = \omega r$

accelerazione tangenziale : $a_t = \alpha r$

accelerazione centripeta : $a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

accelerazione totale : $a = \sqrt{a_r + a_t}$
 forza centripeta : $F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r}$

10.6 Equilibrio rotazionale e dinamica

energia cinetica rotazionale : $K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$
 momento di inerzia : $I = \sum_i m_i r_i^2$
 momento torcente : $\tau = Fd (d = r \sin \theta)$ oppure $\tau = I\alpha$
 condizioni di equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum \tau = 0$
 momento angolare $L = I\omega$
 conservazione del momento angolare : $I_i\omega_i = I_f\omega_f$

10.7 Gravitazione

forza gravitazionale : $F = G\frac{Mm}{r^2}$
 energia potenziale gravitazionale : $U = -G\frac{Mm}{r}$
 velocità di fuga : $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$
 energy in planetary motion: $E = K + U = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}$

10.8 Fluidi

densità : $\rho = \frac{m}{V}$, pressione : $P = \frac{F}{A}$
 pressione in profondità : $p = p_0 + \rho gh$
 forza di galleggiamento : $F_b = m_f g$
 equazione di continuità : $Av = \text{costante}$
 equazione di Bernulli : $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{costante}$

10.9 Moto Oscillatorio

moto armonico semplice : $x(t) = x_m \cos(\omega t + \Phi)$
 $v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \Phi)$
 $a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \Phi)$
 periodo dell' oscillatore lineare : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 Energia meccanica totale : $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\bar{x}^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$
 Periodo del pendolo : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

10.10 Onde

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, v = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{velocità dell'onda in una stringa: } v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

$$\text{potenza media trasmessa: } P_{avg} = \frac{1}{2} v \omega^2 y_m^2$$

$$\text{intensità del suono: } I = \frac{P}{A} = \frac{P_s}{4\pi r^2}$$

$$\text{livello del suono: } \beta = (10\text{db}) \log \frac{I}{I_0}, I = I_0 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Doppler effect: } f' = f \frac{v \pm v_D}{v \pm v_s}$$

10.11 Temperatura, Calore

$$\text{calore specifico c: } Q = mc(T_f - T_i)$$

$$\text{calore di trasformazione: } Q = Lm$$

$$\text{gas ideale: } PV = nRT$$

$$\text{lavoro fatto da un sistema dato: } \Delta W = p\Delta V$$

$$\text{lavoro in un processo isotermico: } \Delta W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$\text{prima legge della termodinamica: } \Delta E_{int} = Q - W$$

$$\text{cambio di entropia: } \Delta S = \frac{Q}{T}$$

$$\text{Scala Kelvin di Temperatura: } T = T_c + 273.15$$

$$\text{efficienza del motore: } \epsilon = \frac{|W|}{Q_H}$$

$$\text{efficienza del motore ideale: } \epsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

Appendice A

Alfabeto greco

minuscolo	maiuscolo	nome	commenti
α	A	alpha	
β	B	beta	bita nel Greco moderno
γ	Γ	gamma	
δ	Δ	delta	
ϵ oppure ε	E	epsilon	
ζ	Z	zeta	zita nel Greco moderno
η	H	eta	ita nel Greco moderno
θ oppure ϑ	Θ	theta	thita nel Greco moderno
ι	I	iota	
κ	K	kappa	
λ	Λ	lambda	
μ	M	mu	mi nel Greco moderno
ν	N	nu	ni nel Greco moderno
ξ	Ξ	xi	
$\omicron$	O	omicron	significa o-minuscolo nel Greco moderno
π oppure ϖ	Π	pi	
ρ oppure ϱ	P	rho	
σ oppure ς	Σ	sigma	ς è adoperato solo alla fine delle parole
τ	T	tau	
υ	Υ	upsilon	ipsilon nel Greco moderno
ϕ oppure φ	Φ	phi	
χ	X	chi	
ψ	Ψ	psi	
ω	Ω	omega	significa o-maiuscolo nel Greco moderno

Appendice B

Compiti di Esame

B.1 Settembre 2009

Esercizio 1

Una esplosione di supernova rilascia un'energia E , di 10^{51} ergs . Convertire in joule (J) questo valore.

Risposta $E = 10^{44} J$

Esercizio 2

Calcolare a quanti $\frac{rad}{s}$ corrispondono 30 $\frac{giri}{minuto}$.

Risposta $= 3.14 \frac{rad}{s}$

Esercizio 3

Un vettore $\vec{V}$ di norma 100 , forma un angolo di 15° con l'asse X in direzione antioraria. Determinare le sue componenti cartesiane V_x e V_y .

Risposta $= V_x = 96.59$, $V_y = 25.88$.

Esercizio 4

Un'automobile percorre una strada rettilinea lunga 50 km alla velocità di 120 km/h. Trovare il tempo di percorrenza in s e poi in h;' ;''.

Risposta $= t=1488 \text{ s}$, $t = 0h; 24'; 48''$.

B.2 Febbraio 2010

Esercizio 1

Un corpo di massa 60 Kg giace fermo su di un piano inclinato di 30° . Calcolare la forza perpendicolare al piano inclinato, N , e la forza parallela, F_p , assumendo $g = 9.805 \frac{m}{s^2}$. Convertire l'angolo in radianti.

Risposta $N = 509.48 \text{ N}$; $F = 294.15 \text{ N}$; $\theta = \frac{\pi}{6}$

Esercizio 2

Quanta energia interna in J e $Kcal$ è utilizzata da un atleta di 80 kg che pratica lo scialpinismo per 3 h e 10 m. Il metabolismo dello scialpinismo richiede $20 \frac{W}{kg}$ e $1cal = 4.186J$.

Risposta $L = 1.82610^7 J$; $L = 4341.1 Kcal$

Esercizio 3

Una donna percorre una strada circolare di raggio pari 0.1 km con una velocità di $28.8 \frac{km}{h}$. Quale è l'accelerazione nel SI.

Risposta $a = 0.64 \frac{m}{s^2}$

Esercizio 4

Calcolare il rapporto tra la gravità a 0 metri di altezza, g , e la gravità su di un aereo a 10000 metri di altezza, g_a . Il diametro terrestre vale 12745 km.

Risposta $\frac{g_a}{g} = 0.998$; $\frac{g_a}{g} = 1.003$

B.3 Marzo 2010

Esercizio 1

Un camion parte a riposo e si muove con una accelerazione costante di $5 \frac{m}{s^2}$. Trovate la sua velocità e la distanza percorsa dopo 4s.

Risposta $v = 20 \frac{m}{s}$; $s = 40m$

Esercizio 2

Un corpo cade liberamente da una posizione di riposo. Assumendo che l'accelerazione valga $9.8 \frac{m}{s^2}$ trovare: (a) la distanza di caduta dopo 3s , (b) la velocità dopo aver percorso 70 m , (c) il tempo necessario a raggiungere una velocità di $25 \frac{m}{s}$, (d) il tempo necessario a cadere di 300 m.

Risposta $s=44.1 \frac{m}{s}$; $v= 37 \frac{m}{s}$; $t=2.55$ s; $t=7.82$ s

Esercizio 3

Un' automobile di 1100 Kg viaggia su una strada dritta ad una velocità di $30 \frac{m}{s}$. L'autista vede un semaforo rosso e frenando esercita una forza frenante di 4 kN. (a) Qual' è la decelerazione dell'automobile ? (b) In quanti secondi si fermerà la macchina?

Risposta $a= 3.63 \frac{m}{s^2}$; $t= 8.25$ s

Esercizio 4

Un cavo orizzontale tira un carrello di 200 kg lungo una rotaia orizzontale. La forza applicata del cavo è 500N. Partendo da riposo : (a) Quanto tempo è richiesto al carrello per raggiungere una velocità di $8 \frac{m}{s}$? , (b) Qual' è la distanza percorsa?

Risposta $t = 3.2$ s; $x=12.8$ m

B.4 Luglio 2010

Problema 1

Una pietra è gettata verticalmente verso l'alto con velocità di 40 m/s al bordo di una scarpata alta 110 m. Calcolare il tempo necessario ad arrivare alla base senza considerare la resistenza dell'aria.

Risposta 1 $a = -g = -9.8 m/s^2$ $v_0 = 40 m/s$ $y = -110 m$ $v^2 = v_0^2 + 2ay = 40^2 + 2 * (-9.8) * (-110) = 3756 m/s^2$ $v = -61.3 m/s$ $v_0 + at - 61.3 = 40 + (-9.8) * t$ $t = (-61.3 - 40)/(-9.8) = 10.3$

Problema 2

L' accelerazione dovuta alla gravità sulla luna è $1.67 m/(s^2)$. Se una persona può lanciare una pietra sulla verticale per 12m sulla terra, a quale altezza può lanciare la pietra sulla luna. Assumete che la velocità di lancio sia uguale in entrambi i casi e l'accelerazione di gravità sulla terra sia $9.8 m/(s^2)$.

Risposta 2 $V_T^2 = 2g_E h_E$ $V_M^2 = 2g_M h_M$ $1 = (g_E * h_E)/(g_M * h_M)$ $h_M = g_E * h_E / g_M = 9.88 * 12 / 1.67 = 70 m$

Problema 3

Una forza orizzontale spinge una scatola di 20 Kg lungo il pavimento con una forza costante. Se il coefficiente di attrito cinetico è 0.60 quanto lavoro fa la forza nel muovere la scatola di 3m.

Risposta $\mathcal{J} F = f = \mu * F_n F_n = 20 * 9.8 = 196N$
 $W = F * x = 0.6 * 20 * 9.8 * 3 = 353J$

Indice analitico

- accelerazione, 30
 - relativa, 50
- caloria
 - a 15 gradi, 4
 - internazionale , 5
 - termochimica , 5
- campo
 - gravitazionale, 63
- centro
 - massa, 54
- centro massa, 65
- cgs, 3
- coefficiente
 - attrito, 39
- coordinate
 - cartesiane, 28
 - polari, 28
- dimensioni, 7
- energia
 - cinetica, 43
 - cinetica corpo rigido, 67
 - conservazione, 59
 - meccanica, 44
 - potenziale, 43
- equilibrio, 38
- forza
 - apparente, 51
 - attrito, 39
 - centripeta, 40
 - elastica, 40
 - momento, 45
 - peso, 39
- lavoro, 42
 - gravitazione, 64
- legge
 - gravitazione, 62
 - Keplero1, 61
 - Keplero2, 61
 - Keplero3, 61
- mks, 2
- momento
 - angolare, 46
 - inerzia, 66
 - inerzia integrale, 67
- moto
 - accelerato, 26
 - armonico, 27
 - circolare, 31
 - corpo rigido, 65
 - nel piano, 28
 - rettilineo, 25
- Newton
 - prima legge, 34
 - seconda legge, 35
 - terza legge, 35
- pendolo, 41
 - composto, 68
- prefissi, 7

- punto, 23
- quantità di moto, 36
- reazioni vincolari, 19
- sistema-internazionale, 6
- sistema-tecnico, 5
- sistemi
 - misura, 1
- spazio, 22
- tabella
 - dimensioni, 8
 - prefissi, 7
- tempo, 21
- teorema
 - Konig1, 56
 - Konig2, 57
 - momento angolare, 56
- urto
 - anelastico, 59
 - elastico, 60
- velocità
 - somma, 50
- velocità angolare, 31
- velocità, 25
- vettore
 - posizione, 24
 - spazio, 23
- vettori
 - applicazione, 18
 - cartesiani, 15
 - componenti, 14
 - prodotto con scalare, 10
 - prodotto misto, 13
 - prodotto scalare, 11
 - prodotto vettoriale, 12
 - somma, 9, 36